

Будем решать данную задачу с использованием быстроты θ , определяемой выражением:

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh \theta.$$

С учётом этого Лоренц-фактор γ , а также энергия E и импульс p частицы массой m могут быть записаны следующим образом:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh \theta \quad E = \gamma mc^2 = mc^2 \cosh \theta \quad p = \gamma \beta mc = mc \sinh \theta.$$

Пусть частица движется вдоль оси x со скоростью v , а скорость инерциальной системы отсчёта S' направлена вдоль оси x и равна V . Тогда скорость частицы $v_{\text{отн}}$ относительно системы отсчёта S' составляет:

$$v_{\text{отн}} = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}.$$

Пусть $v_{\text{отн}}/c = \tanh \theta_{\text{отн}}$, а $V/c = \tanh \theta_V$. Тогда имеем:

$$\tanh \theta_{\text{отн}} = \frac{\tanh \theta - \tanh \theta_V}{1 - \tanh \theta \tanh \theta_V} = \tanh(\theta - \theta_V),$$

откуда:

$$\theta_{\text{отн}} + \theta_V = \theta.$$

Таким образом, быстрота частицы θ в лабораторной системе отсчёта является суммой быстрот θ_V и $\theta_{\text{отн}}$, характеризующих движение системы отсчёта S' и движение частицы относительно неё соответственно. Из этого также следует, что изменения быстрот частицы относительно всех инерциальных систем отсчёта, движущихся вдоль оси x , должны быть одинаковы. Далее мы будем использовать доказанное утверждение.

Рассмотрим движение ракеты из сопутствующей ей инерциальной системы отсчёта, называемой собственной. Для изменения скорости ракеты имеем:

$$dv_{\text{отн}} = c d \tanh \theta_{\text{отн}} = \frac{c}{\cosh^2 \theta_{\text{отн}}} d\theta_{\text{отн}}.$$

Поскольку $\theta_{\text{отн}} = 0$, имеем:

$$dv_{\text{отн}} = c d\theta_{\text{отн}} = c d\theta,$$

где θ – быстрота ракеты в лабораторной системе отсчёта.

Рассмотрим динамику ускорения ракеты в собственной системе отсчёта. Пусть dE_{r} – энергия вылетающего из ракеты горючего, а dE_{p} – изменение энергии ракеты. Тогда из закона сохранения энергии:

$$dE_{\text{r}} = -dE_{\text{p}}.$$

При этом для ракеты имеем:

$$E = \gamma_{\text{отн}} mc^2 = mc^2 \cosh \theta_{\text{отн}} \Rightarrow dE = c^2 (\cosh \theta_{\text{отн}} dm + m \sinh \theta_{\text{отн}} d\theta_{\text{отн}}).$$

Поскольку $\theta_{\text{отн}} = 0$:

$$dE_{\text{p}} = c^2 dm \Rightarrow dE_{\text{r}} = -c^2 dm.$$

Для импульса топлива имеем:

$$dp_{\text{r}} = \frac{u dE_{\text{r}}}{c^2} = -u dm.$$

Применяя закон сохранения импульса, получим:

$$dp_{\text{p}} = dp_{\text{r}} = -u dm.$$

где dp_{p} – изменение импульса ракеты, для которого имеем:

$$dp_{\text{p}} = d(\gamma_{\text{отн}} M v_{\text{отн}}) = d(mc \sinh \theta_{\text{отн}}) = c(m \cosh \theta_{\text{отн}} d\theta_{\text{отн}} + \sinh \theta_{\text{отн}} dM) = mcd\theta.$$

Таким образом:

$$mcd\theta = -u dm.$$

Интегрируя, получим:

$$\theta = \frac{u}{c} \ln \frac{M}{m}.$$

Окончательно:

Ответ:

$$v = c \tanh \left(\frac{u}{c} \ln \frac{M}{m} \right) = c \frac{\left(\frac{M}{m} \right)^{2u/c} - 1}{\left(\frac{M}{m} \right)^{2u/c} + 1}.$$

A2^{0.30}

Определите массу m ракеты к моменту прекращения работы двигателя. Ответ выразите через M , a , u , c и τ .

Вспользуемся результатом решения пункта A1:

$$a = \frac{dv_{\text{отн}}}{d\tau} = c \frac{d\theta}{d\tau} \Rightarrow \theta = \frac{a\tau}{c}.$$

Поскольку для $M(\theta)$ имеем:

$$m = Me^{-\theta c/u},$$

для $M(\tau)$ находим:

Ответ:

$$m = Me^{-a\tau/c}.$$

A3^{0.30}

Найдите перемещение S ракеты к моменту прекращения работы двигателя. Ответ выразите через c , u , a и τ .

За время dt в собственной системе отсчёта в лабораторной системе отсчёта успеваает пройти время dt , равное:

$$dt = \gamma d\tau = \cosh \theta d\tau.$$

Для перемещения ракеты dS за время dt имеем:

$$dS = v dt = c \tanh \theta \cosh \theta d\tau = c \sinh \theta d\tau.$$

Поскольку $d\tau = cd\theta/a$, получим:

$$dS = \frac{c^2 \sinh \theta d\theta}{a} \Rightarrow S(\theta) = \frac{c^2 (\cosh \theta - 1)}{a}.$$

Подставляя $\theta(\tau)$, находим:

Ответ:

$$S = \frac{c^2 \left(\cosh \frac{a\tau}{c} - 1 \right)}{a}$$

A4^{1.50}

Как можно точнее определите перемещение S ракеты в лабораторной системе отсчёта к моменту прекращения работы двигателя. Ответ выразите через c и τ_0 . Приведите необходимые численные значения в таблице в листах ответов. При необходимости вы можете использовать миллиметровую бумагу в листах ответов для построения графиков.

Для перемещения ракеты dS имеем:

$$dS = c \sinh \theta d\tau.$$

Подставляя $\theta(M)$, получим:

$$dS = c \sinh \left(\frac{u}{c} \ln \frac{M}{m} \right) d\tau = c\tau_0 \cdot \sinh \left(\frac{u}{c} \ln \frac{1}{y} \right) dx.$$

Для перемещения S к моменту прекращения работы двигателей получим:

$$S = c\tau_0 \int_0^1 \sinh \left(\frac{u}{c} \ln \frac{1}{y} \right) dx.$$

Данный интеграл лучше всего вычислить, предварительно построив график зависимости от x подынтегральной функции, однако можно обойтись и методом трапеций. Имеем:

$$\int_0^1 \sinh\left(\frac{u}{c} \ln \frac{1}{y}\right) dx = 0.146 \pm 0.004.$$

Таким образом:

Ответ:

$$S = (0.146 \pm 0.04) c \tau_0.$$

B1 0.70 Пусть масса ракеты уменьшилась до значения m . Найдите массы m_1 и m_2 вылетевших из ракеты горючих веществ 1 и 2 соответственно. Ответ выразите через m и известные величины.

Воспользуемся законом сохранения энергии в системе отсчёта, сопутствующей движению ракеты:

$$dE_1 + dE_2 = \gamma_1 c^2 dm_1 + \gamma_2 c^2 dm_2 = -dE_p = -c^2 dM,$$

где γ_1 и γ_2 – релятивистские гамма-факторы, соответствующие скоростям u_1 и u_2 .

Поскольку γ_1 и γ_2 являются постоянными величинами:

$$\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2 = M - m.$$

Учитывая, что $m_2/m_1 = \alpha$, получим:

$$m_1 = \frac{M - m}{\gamma_1 + \alpha \gamma_2} \quad m_2 = \frac{\alpha(M - m)}{\gamma_1 + \alpha \gamma_2},$$

или же:

Ответ:

$$m_1 = \frac{M - m}{\frac{1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}}} \quad m_2 = \frac{\alpha(M - m)}{\frac{1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}}}$$

B2 0.70 Найдите скорость v ракеты в момент, когда её масса уменьшилась до значения m . Ответ выразите через m и известные величины.

Запишем уравнение движения ракеты:

$$\frac{dp_p}{d\tau} = mc \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{dp_r}{d\tau} = \gamma_1 u_1 \frac{dm_1}{d\tau} + \gamma_2 u_2 \frac{dm_2}{d\tau}.$$

Отсюда:

$$d\theta = -\frac{dm}{m} \frac{\gamma_1 u_1 + \alpha \gamma_2 u_2}{c(\gamma_1 + \alpha \gamma_2)} \Rightarrow \theta = \frac{\gamma_1 u_1 + \alpha \gamma_2 u_2}{c(\gamma_1 + \alpha \gamma_2)} \ln \frac{M}{m}.$$

Поскольку $v = c \tanh \theta$, получим:

Ответ:

$$v = c \tanh \left(\frac{\frac{u_1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} + \frac{\alpha u_2}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}}}{c \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}} \right)} \ln \frac{M}{m} \right).$$

C1 0.50 Пусть двигатель ракеты выключен, а ракета движется со скоростью v . С какой скоростью $dm/d\tau$ по часам ракеты изменяется её масса? Ответ выразите через v и известные величины.

В лабораторной системе отсчёта в единицу времени в ракету попадает масса вещества, равная:

$$\frac{dm_B}{dt} = \rho S v.$$

Тогда в системе отсчёта, сопутствующей движению ракеты:

$$\mu_{\text{в}} = \frac{dm_{\text{в}}}{d\tau} = \frac{dm_{\text{в}}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \rho S v.$$

Энергия вещества $dE_{\text{в}}$, попавшего в ракету, трансформируется в энергию ракеты $dE_{\text{р}}$, поэтому:

$$dE_{\text{р}} = c^2 dm = dE_{\text{в}} = \gamma c^2 dm_{\text{в}} = \gamma^2 c^2 \rho S v d\tau.$$

Окончательно

Ответ:

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{\rho S v}{1 - v^2/c^2}.$$

C2 0.50

Пусть двигатель ракеты работает таким образом, что масса движущейся в вакууме ракеты изменяется со скоростью $dm_0/d\tau$ по часам ракеты в момент времени τ .

С какой скоростью $dm/d\tau$ по часам ракеты изменяется её масса в момент времени τ , если ракета движется со скоростью v , а двигатель ракеты работает так же, как и при движении в вакууме (т.е в момент времени τ в единицу времени из ракеты вылетает та же масса горючего с той же скоростью)? Ответ выразите через $dm_0/d\tau$, v и известные величины.

Воспользуемся законом сохранения энергии в системе отсчёта, сопутствующей движению ракеты:

$$\frac{dE_{\text{р}}}{d\tau} = c^2 \frac{dm}{d\tau} = \frac{dE_{\text{в}}}{d\tau} - \frac{dE_{\text{г}}}{d\tau} = \gamma^2 \rho S c^2 v - \frac{dE_{\text{г}}}{d\tau}.$$

Когда ракета расположена неподвижно:

$$\frac{dE_{\text{г}}}{d\tau} = -c^2 \frac{dm_0}{d\tau}.$$

Таким образом:

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{dm_0}{d\tau} + \gamma^2 \rho S v,$$

или же:

Ответ:

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{dm_0}{d\tau} + \frac{\rho S v}{1 - v^2/c^2}.$$

C3 0.80

Пусть двигатель ракеты включен, но работает неизвестным образом. Наблюдатель, находящийся на ракете, выяснил, что в некоторый момент времени масса ракеты равнялась m , скорость изменения массы ракеты по часам ракеты равнялась $dm/d\tau$, а ракета двигалась со скоростью v относительно лабораторной системы отсчёта. Какое ускорение свободного падения a испытывал в рассматриваемый момент пассажир? Ответ выразите через v , m , $dm/d\tau$ и известные величины.

В системе отсчёта, сопутствующей движению ракеты, закон сохранения энергии выглядит следующим образом:

$$dE_{\text{г}} + dE_{\text{р}} = dE_{\text{в}} \Rightarrow dE_{\text{г}} = \gamma^2 c^2 \rho S v d\tau - c^2 dm.$$

Воспользуемся законом сохранения импульса:

$$\frac{dp_{\text{р}}}{d\tau} = ma = \frac{dp_{\text{г}}}{d\tau} - \frac{dp_{\text{в}}}{d\tau} = \frac{u}{c^2} \frac{dE_{\text{г}}}{d\tau} - \gamma v \frac{dm_{\text{в}}}{d\tau}.$$

Подставляя найденные величины, получим:

Ответ:

$$a = \frac{\gamma^2 \rho S v (u - v)}{m} - \frac{u}{m} \frac{dm}{d\tau}.$$

D1 0.50

Пусть ракета массой m движется со скоростью v . Определите ускорение свободного падения a , испытываемое пассажирами ракеты. Ответ выразите через m , v и известные величины.

С учётом того, что массы аннигилирующих вещества и топлива ракеты одинаковы, можно записать:

$$\frac{dm}{d\tau} = -\gamma\rho Sv.$$

Тогда для ускорения ракеты с учётом $u = c$ получим:

$$a = \frac{\gamma\rho Sv}{m}(c(\gamma + 1) - \gamma v),$$

или же:

Ответ:

$$a = \frac{\rho Sv}{m\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(c \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) - \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

D2^{0.70}

Какой скорости v достигнет ракета к моменту, когда её масса уменьшится до значения m ? Ответ выразите m и известные величины.

Перейдём к быстроте:

$$a = c \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\rho Sc^2 \sinh \theta}{m} (1 + \cosh \theta - \sinh \theta).$$

При этом:

$$\frac{dm}{d\tau} = -\rho Sc \sinh \theta.$$

Таким образом:

$$\frac{d\theta}{1 + \cosh \theta - \sinh \theta} = \frac{1}{1 + e^{-\theta}} = -\frac{dm}{m}.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{1 + e^{-\theta}} = \int_0^{e^\theta} \frac{dx}{1 + x} = \ln \frac{1 + e^\theta}{2} = - \int_M^m \frac{dm}{m} = \ln \frac{M}{m},$$

откуда:

$$e^\theta = \frac{2M}{m} - 1.$$

Для скорости v имеем:

$$v = c \tanh \theta = c \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1},$$

откуда находим:

Ответ:

$$v = c \frac{\left(\frac{2M}{m} - 1 \right)^2 - 1}{\left(\frac{2M}{m} - 1 \right)^2 + 1}.$$

D3^{0.30}

Найдите перемещение L ракеты к моменту, когда её скорость достигает значения v . Ответ выразите через v и известные величины.

Изменение массы ракеты равно массе попавшего в неё вещества:

$$m_{\text{в}} = (M - m) = \rho SL.$$

При этом:

$$m = \frac{2M}{1 + e^\theta}.$$

Найдём $e^\theta(v)$:

$$\frac{v}{c} = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1} \Rightarrow e^\theta = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$L = \frac{M}{\rho S} \left(1 - \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}} \right).$$

E1^{0.50}

Получите зависимость $\delta m(\tau)$. Ответ выразите через τ и известные величины.

Различие масс обусловлено попаданием вещества в ракету. Поскольку двигатель настроен на движение ракеты в вакууме:

$$\frac{dE_{\text{вещ}}}{d\tau} = -c^2 \frac{dm_0}{d\tau}.$$

Тогда из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{dm}{d\tau} - \frac{dm_0}{d\tau} = \frac{d(\delta m)}{d\tau} = \gamma^2 \rho S v = \rho S c \sinh \theta \cosh \theta.$$

Обратим внимание, что поправка к скорости движения ракеты, вызванная попаданием в неё вещества, является малой. Тогда $\tau = c\theta/a$. Таким образом:

$$\delta m(\theta) = \frac{\rho S c^2}{a} \int_0^\theta \sinh \theta \cosh \theta d\theta = \frac{\rho S c^2 \sinh^2 \theta}{2a}.$$

Подставляя θ , получим:

Ответ:

$$\delta m(\tau) = \frac{\rho S c^2 \sinh^2(a\tau/c)}{2a}.$$

E2^{0.20}

На какую величину δm_1 отличаются массы ракет, движущихся в вакууме и веществе к моменту окончания работы двигателей? Ответ выразите через v_1 и известные величины.

Поскольку $v/c = \tanh \theta$:

$$\delta m(v) = \frac{\rho S v^2}{2a(1 - v^2/c^2)}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$\delta m_1 = \frac{\rho S v_1^2}{2a(1 - v_1^2/c^2)}.$$

E3^{1.50}

Получите зависимость $\delta v(\tau)$. Ответ выразите через τ и известные величины.

Уравнение движения ракеты в вакууме выглядит следующим образом::

$$m_0 a = -u \frac{dm_0}{d\tau}.$$

Движение ракеты в веществе выглядит следующим образом:

$$ma = \gamma^2 \rho S v (u - v) - u \frac{dm}{d\tau}.$$

Перепишем последнее соотношение с учётом малости $\delta v/v_0$ и $\delta m/m_0$:

$$a\delta m + m_0 c \frac{d(\delta\theta)}{d\tau} = \gamma^2 \rho S v (u - v) - u \frac{d(\delta m)}{d\tau}.$$

Подставляя m_0 , δm и $d(\delta m)/d\tau$, получим:

$$\frac{\rho S c^2 \sinh^2 \theta}{2} + \frac{M a e^{-\theta c/u}}{c} \frac{d(\delta \theta)}{d\theta} = -\gamma^2 \rho S v^2 = -\rho S c^2 \sinh^2 \theta.$$

Таким образом:

$$\frac{d(\delta \theta)}{d\theta} = -\frac{3 \rho S c^2 e^{\theta c/u} \sinh^2 \theta}{2 M a}.$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \delta \theta &= -\frac{3 \rho S c^2}{2 M a} \int_0^\theta \sinh^2 \theta e^{\theta c/u} d\theta = -\frac{3 \rho S c^3}{8 M a} \int_0^\theta \left(e^{\theta(2+c/u)} - 2 e^{\theta c/u} + e^{\theta(c/u-2)} \right) d\theta = \\ &= - -\frac{3 \rho S c^2}{8 M a} \left(\frac{e^{\theta(2+c/u)} - 1}{2 + c/u} - 2 \frac{e^{\theta c/u} - 1}{c/u} + \frac{e^{\theta(c/u-2)} - 1}{c/u - 2} \right). \end{aligned}$$

При этом:

$$\delta v = c \delta \tanh \theta = \frac{c \delta \theta}{\cosh^2 \theta}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$\delta v(\tau) = -\frac{3 \rho S c^3}{8 M a \cosh^2(a \tau / c)} \left(\frac{e^{(2+c/u) a \tau / c} - 1}{2 + c/u} - 2 \frac{e^{a \tau / u} - 1}{c/u} + \frac{e^{(c/u-2) a \tau / c} - 1}{c/u - 2} \right).$$

Е4^{0.30}

На какую величину δv_1 отличаются скорости ракет, движущихся в вакууме и веществе к моменту окончания работы двигателей? Ответ выразите через v_1 и известные величины.

Выразим e^θ через скорость v :

$$v/c = \tanh \theta = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1} \Rightarrow e^\theta = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}.$$

Подставляя в выражение для $\delta v(\theta)$, получим:

Ответ:

$$\delta v_1 = -\frac{\rho S c^3 (1 - v_1^2/c^2)}{8 M a} \left(\frac{\left(\frac{1 + v_1/c}{1 - v_1/c}\right)^{1+c/(2u)} - 1}{2 + c/u} - 2 \frac{\left(\frac{1 + v_1/c}{1 - v_1/c}\right)^{c/(2u)} - 1}{c/u} + \frac{\left(\frac{1 + v_1/c}{1 - v_1/c}\right)^{c/(2u)-1} - 1}{c/u - 2} \right).$$