

A1 0.30 Выразите p_m через u_m , k , γ и p_0 .

Относительное изменение объёма сегментов газовой среды

$$\varepsilon(x, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Re}\left(-iku_me^{i(\omega t - kx)}\right).$$

Поскольку колебания изоэнтропичны, то

$$(p(x, t) - p_0)/p_0 + \gamma\varepsilon(x, t) = 0 \implies p_m/p_0 + \gamma \cdot (-iku_m) = 0 \implies$$

Ответ:

$$p_m = ik\gamma p_0 u_m$$

A2 0.30 Выразите скорость звука c в газе через γ , ρ_0 и p_0 .

Рассматриваем динамику элемента среды:

$$\frac{dF}{dx\,dS} = -\frac{\partial p}{\partial x} = \boxed{-k^2\gamma p_0 u_m} = \rho_0 \ddot{u} = -\rho_0 \omega^2 u = \boxed{-\rho_0 k^2 c^2 u} \implies$$

Ответ:

$$c = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$$

A3 0.30 Выразите p_m через ω , c , ρ_0 и u_m .

Подставляя $\gamma p_0 = \rho_0 c^2$ в результат A1, получим:

Ответ:

$$p_m = i\omega c \rho_0 u_m$$

A4 0.50 Получите выражение для средней плотности потока энергии $\mathcal{J}$ в такой волне. Выразите ответ через ρ_0 , c , ω и u_m .

Поток энергии можно найти, усреднив мощность среды на единицу площади. Мощность среды

$$N = p \frac{\partial u}{\partial t} = \left(p_0 + \operatorname{Re}\left(i\omega c \rho_0 u_m e^{i(\omega t - kx)}\right)\right) \cdot \operatorname{Re}\left(i\omega u_m e^{i(\omega t - kx)}\right).$$

Усредняя по времени, получим:

Ответ:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \rho_0 c \omega^2 |u_m|^2$$

A5 0.30 Запишите выражение для давления $\delta p(x, t)$ в такой стоячей волне. Выразите ответ через ω , c , ρ_0 , u_m , x и t .

Стоячая волна может быть представлена как суперпозиция двух бегущих волн $u_m \operatorname{Re}\left(e^{i(\omega t - kx)}\right) + u_m \operatorname{Re}\left(e^{i(\omega t + kx)}\right)$. Тогда давление выразится как

$$p(x, t) = p_0 + u_m \operatorname{Re}\left(i\omega c \rho_0 e^{i(\omega t - kx)}\right) - u_m \operatorname{Re}\left(i\omega c \rho_0 e^{i(\omega t + kx)}\right).$$

Упрощая, получим:

Ответ:

$$\delta p(x, t) = 2\rho_0 \omega c u_m \sin(kx) \cos(\omega t)$$

B1 ^{0.80} Запишите приближенное выражение для давления $\delta p_{Euler}(x_0, t)$ в рассматриваемой стоячей волне в случае $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1$. Выразите ответ через c , ω , ρ_0 , u_m , t и x_0 .

Запишем точное выражение $x_0 = x + u(x, t)$. В случае малых смещений можно заменить x на x_0 в аргументе u , т.е. $x = x_0 - u(x_0, t) = x_0 - 2u_m \cos(kx) \cos(\omega t)$. Подставляя это выражение в результат предыдущего пункта, получаем

$$\delta p(x, t) = 2\rho_0 \omega c u_m \sin(kx_0 - 2ku_m \cos(kx) \cos(\omega t)) \cos(\omega t).$$

Раскрывая в первом порядке, получаем ответ:

Ответ:

$$\delta p_{Euler}(x_0, t) = 2\rho_0 \omega c u_m \sin(kx) \cos(\omega t) - 4\rho_0 u_m^2 \omega^2 \cos^2(kx) \cos^2(\omega t)^2$$

B2 ^{0.40} Получите выражение для среднего давления $\overline{\delta p}(x_0)$ стоячей волны в фиксированной точке пространства. Выразите ответ через ω , c , ρ_0 , u_m и x_0 .

В результате усреднения $\overline{\cos(\omega t)} = 0$, $\overline{\cos^2(\omega t)} = 0$, поэтому:

Ответ:

$$\overline{\delta p}(x_0) = -2\rho_0 \omega^2 |u_m|^2 \cos^2(kx_0)$$

B3 ^{0.80} Запишите выражение для силы $F(x_0)$, которая действует на частицу. (Полученное выражение и есть акустическая сила.) Запишите выражение для потенциала этой силы. Выразите ответ через ω , c , ρ_0 , u_m , x_0 и a .

Сила, которая действует на тело при наличии градиента давления (также известная как **сила Архимеда**) даётся выражением

$$F = -V \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Таким образом, средняя сила, действующая на частицу, будет равна ($V = 4\pi a^3/3$):

Ответ:

$$F(x_0) = -\frac{8\pi}{3} \frac{\rho_0 a^3 \omega^3 |u_m|^2}{c} \sin(2kx_0)$$

C1 ^{0.50} Найдите, при каком минимальном $|u_m|_{cr}$ возможна левитация частицы в волне. В ответ могут войти a , ρ_0 , γ , p_0 , частота звука f_0 , плотность частицы ρ и ускорение свободного падения g .

Левитация станет возможна, если $\max_{x_0} F(x_0) = mg = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho g$. Подставляя $c = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$, $\omega = 2\pi f_0$, получаем:

Ответ:

$$|u_m|_{cr} = \sqrt{\frac{\rho g}{16\pi^3 f_0^3 \rho_0}} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

C2 ^{0.50} Найдите численно $|u_m|_{cr}$ для параметров установки.

Ответ:

$$|u_m|_{cr} \approx 16 \text{ мкм}$$

C3 ^{1.00} Какой громкости D в децибелах соответствует ответ предыдущего пункта? Приведите численный ответ.

Поскольку стоячая волна – это суперпозиция двух бегущих, можно найти громкость одной бегущей волны. Используя результат пункта **A4**, имеем:

$$D_1 = 120 + 10 \log_{10} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} \cdot 4 \pi^2 f_0^2 |u_m|^2 \right).$$

Так как бегущих волны две, громкость в стоячей волне будет на $10 \log_{10} 2$ дБ больше. Итого:

Ответ:

$$D = 120 + 10 \log_{10} \left(\sqrt{\gamma p_0 \rho_0} (2 \pi f_0 |u_m|)^2 \right) \approx 146 \text{ дБ}$$

Громкость получилась реалистичной =)

D1 0.30

Из соображений размерности получите выражение для характерной толщины пограничного слоя δ с точностью до численного коэффициента, который в дальнейшем принимается равным единице. Выразите ответ через η , ρ_0 и f_0 .

Метод размерностей: $[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$, $[f_0] = \text{с}^{-1}$, $[\delta] = \text{м}$.

Ответ:

$$\delta = \sqrt{\eta / \rho_0 f_0}$$

D2 0.50

Для установки, описанной в предыдущей части, найдите отношение массы воздуха в пограничном слое $m_{\text{вяз}}$ к массе шарика m_0 .

Вязкость воздуха $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Оценим $\delta \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ м} \ll a$, поэтому $m_{\text{вяз}}/m_0 = S \delta \rho_0 / V \rho \implies$

Ответ:

$$m_{\text{вяз}}/m_0 = \frac{3 \sqrt{\eta \rho_0 / f_0}}{a \rho} \approx 5.8 \cdot 10^{-4}$$

E1 0.30

Выразите среднюю плотность звуковой энергии $\mathcal{W}$ в резонаторе через ρ_0 , ω и u_m .

Стоячая волна – это суперпозиция двух бегущих. В каждой волне плотность энергии (кинетической + потенциальной) равна $\mathcal{W}_1 = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 |u_m|^2$. Таким образом, полная средняя плотность энергии равна

Ответ:

$$\mathcal{W} = \rho_0 \omega^2 |u_m|^2$$

E2 1.00

Получите зависимость положения шарика от времени $x(t)$, если в начальный момент времени $x(t = 0) = x_0$. Ответ выразите через x_0 , t , w , a , c , $\mathcal{W}$, η и частоту колебаний f_0 .

Поскольку по условию резонаторы **высокодобротные**, амплитуда колебаний их стенок (пьезоэлементов) должна быть намного меньше, чем амплитуда колебаний элементов среды в резонаторе. Иными словами, на границах резонатора будут находиться узлы смещения, и стоячая волна будет описываться так же, как в предыдущих частях. Поскольку шарики безынерционные, в любой момент времени должно выполняться

$$-\frac{8\pi}{3} \frac{\rho_0 a^3 \omega^3 |u_m|^2}{c} \sin(2\pi x/w) = 6\pi \eta a \frac{dx}{dt}.$$

Подставляя $\xi = \pi x/w$, получаем:

$$-\frac{16\pi^2}{9} \frac{a^2 f_0 \mathcal{W}}{w \eta c} dt = \frac{(2\xi)}{\sin(2\xi)}.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{d(2\xi)}{\sin(2\xi)} = \ln \operatorname{tg}(\xi) \implies$$

Ответ:

$$x(t) = \frac{w}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi x_0}{w} \right) \exp \left(-\frac{16\pi^2}{9} \frac{a^2 f_0 \mathcal{W}}{w \eta c} t \right) \right)$$

ЕЗ^{0.40} Выразите среднюю плотность энергии $\mathcal{W}$ звуковой волны в резонаторе через начальную (x_0) и конечную (x) координаты шарика, время его движения t и известные величины (w, a, f_0, η, c).

Ответ:

$$\mathcal{W} = \frac{9}{16\pi^2} \frac{w \eta c}{a^2 f_0 t} \ln \left(\frac{\operatorname{tg}(\pi x_0/w)}{\operatorname{tg}(\pi x/w)} \right)$$

F1^{0.30} Чему равна рабочая частота f_0 резонатора? Рабочая частота – это **минимальная** частота, при которой в резонаторе может возбуждаться стоячая волна. Скорость звука в воде $c = 1.5$ км/с.

По условию рабочая частота – это минимальная частота, при которой в резонаторе может возникнуть стоячая волна вдоль оси x . Это значит, что на ширине резонатора w должна укладываться половина волны. Учитывая $c = \lambda f_0$, получаем:

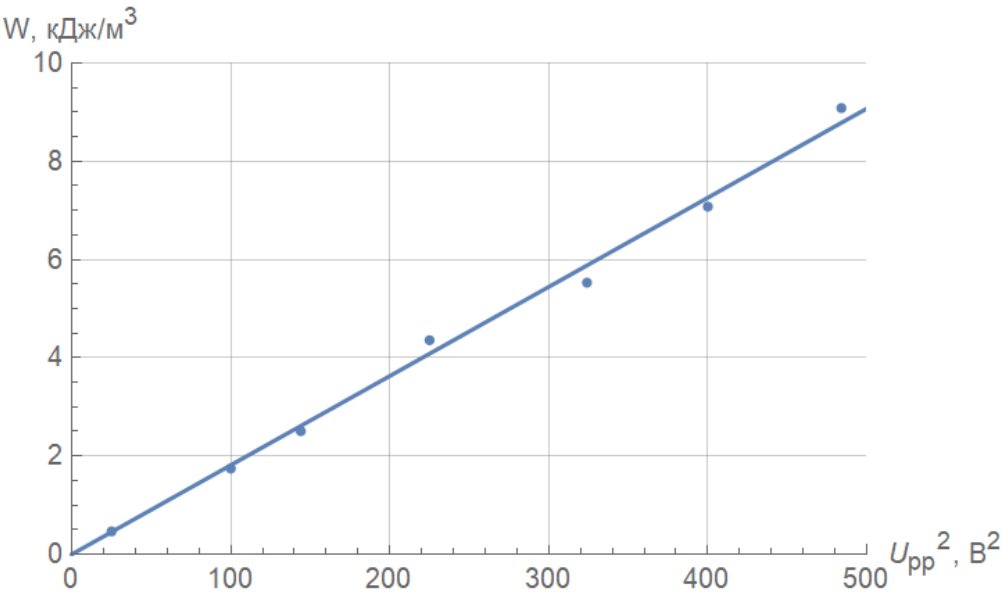
Ответ:

$$f_0 = \frac{c}{2w} \approx 2.0 \text{ МГц}$$

F2^{1.50} Найдите A . Рассчитайте добротность резонатора Q , если на рабочей частоте импеданс пьезоэлементов равен $Z = (4 + 3i) \cdot 32$ кОм.

Для получения $\mathcal{W}$ через x, x_0 и t воспользуемся результатами предыдущей части. Для линеаризации построим зависимость $\mathcal{W}(U_{pp}^2)$. Пересчитаем точки, занесём в таблицу и построим график:

$U_{pp}, \text{ В}$	5	10	12	15	18	20	22
$x, \text{ мкм}$	144	124	110	74	54	34	18
$U_{pp}^2, \text{ В}^2$	25	100	144	225	324	400	484
$\mathcal{W}, \text{ мДж/м}^3$	0.038	0.141	0.203	0.351	0.446	0.571	0.732



Угловой коэффициент этого графика будет равен A . Фитируя прямой, проходящей через начало координат, получаем:

Ответ:

$$A \approx 1.47 \frac{\text{мкДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{В}^2}$$

Наконец, свяжем A с добротностью резонатора. Полная энергия, содержащаяся в резонаторе:

$$E = V\mathcal{W} = lhw\mathcal{W}.$$

Потери энергии равны мощности, выделяющейся на пьезоэлементах, т.е.

$$P = \overline{U(t)I(t)} = \frac{1}{2} \frac{U_{pp}^2}{|Z|} \arg Z = \frac{1}{2} U_{pp}^2 \frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|^2}.$$

По определению добротности

$$Q \equiv \frac{2\pi f_0 E}{P} = 4\pi f_0 lhwA|Z|^2/\operatorname{Re} Z \implies$$

Ответ:

$$Q \approx 0.018$$