

A1 ^{0.30} Пусть в веществе с показателем преломления n распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой колебаний E напряжённости электрического поля. Выразите амплитуду колебаний напряжённости H магнитного поля в этой волне через E , n , а также магнитную и электрическую постоянные μ_0 и ε_0 соответственно.

В плоской электромагнитной волне объёмные плотности энергий электрического и магнитного поля одинаковы, поэтому:

$$w_M = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = w_E = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}.$$

Для фазовой скорости распространения волны имеем:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \mu \varepsilon}} \Rightarrow n = \sqrt{\mu \varepsilon}.$$

Поскольку $\mu = 1$, для H имеем:

Ответ:

$$H = nE \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}.$$

A2 ^{0.40} Какие 4 граничных условия на электрическое и магнитное поля выполняются на границе раздела сред? Запишите их в листы ответов в удобной вам форме.

Из теоремы Гаусса для индукции магнитного поля следует:

Ответ:

$$B_{n1} = B_{n2}.$$

Поскольку на границе отсутствуют свободные заряды, из теоремы Гаусса для вектора электрической индукции следует:

Ответ:

$$D_{n1} = D_{n2}.$$

Из теоремы о циркуляции для напряжённости электрического поля следует:

Ответ:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}.$$

Поскольку на границе раздела отсутствуют сторонние токи, из теоремы о циркуляции для напряжённости магнитного поля следует:

Ответ:

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}.$$

A3 ^{0.40} Все граничные условия, выполняющиеся на границе раздела двух сред, должны быть выполнены в каждой её точке в произвольный момент времени. Исходя из этого докажите следующие равенства:

$$\omega_r = \omega_t = \omega \quad \theta_r = \theta \quad n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta.$$

Каждое из полей в среде 1 является суммой полей в падающей и отражённой волне, а поле в среде 2 является полем прошедшей волны. Тогда каждое из граничных условий имеет вид:

$$Ae^{i(\omega t - \vec{k}r)} + Be^{i(\omega_r t - \vec{k}_r r)} = Ce^{i(\omega_t t - \vec{k}_t r)}.$$

Данные условия должны быть выполнены в любой момент времени, откуда следуют соотношения:

$$\omega_r = \omega_t = \omega.$$

Также данные условия должны быть выполнены в любой точке границы раздела сред. Пусть x – ось, направленна на рис.1. и рис.2. вправо. Тогда для выполнения граничных условий в любой точке границы раздела двух сред должны выполняться соотношения:

$$k_{rx} = k_{tx} = k_x.$$

Волновое число определяется соотношением:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c}.$$

Отсюда получим:

$$k_x = \frac{\omega n_1 \sin \theta}{c} = k_{rx} = \frac{\omega n_1 \sin \theta_r}{c} = k_{tx} = \frac{\omega n_2 \sin \theta_t}{c}.$$

Отсюда следуют соотношения:

$$\theta = \theta_r \quad n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta_t.$$

A4 ^{0.50} Получите выражение для комплексных коэффициентов отражения и прохождения r_s и t_s соответственно в случае s -поляризованной волны. Ответы выразите через n_1 , n_2 , θ и θ_t . Выражения для r_s и t_s называются формулами Френеля для s -поляризованной волны.

Запишем граничное условие для тангенциальной компоненты напряженности электрического поля:

$$E_{\tau 1} = E_0(1 + r_s) = E_{\tau 2} = E_0 t_s \Rightarrow 1 + r_s = t_s.$$

Запишем граничное условие для тангенциальной компоненты напряжённости магнитного поля:

$$H_{\tau 1} = n_1 \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} (1 - r_s) \cos \theta = H_{\tau 2} = n_2 \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} t_s \cos \theta_t \Rightarrow n_1 (1 - r_s) \cos \theta = n_2 t_s \cos \theta_t.$$

Отсюда находим:

Ответ:

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_t} \quad t_s = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_t}.$$

A5 ^{0.50} Получите выражение для коэффициентов r_p и t_p в случае p -поляризованной волны. Ответы выразите через n_1 , n_2 , θ и θ_t . Выражения для r_p и t_p называются формулами Френеля для p -поляризованной волны.

Запишем граничное условие для тангенциальной компоненты напряженности электрического поля:

$$E_{\tau 1} = E_0(1 - r_p) \cos \theta = E_{\tau 2} = E_0 t_p \cos \theta_t \Rightarrow (1 - r_p) \cos \theta = t_p \cos \theta_t.$$

Запишем граничное условие для тангенциальной компоненты напряжённости магнитного поля:

$$H_{\tau 1} = n_1 \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} (1 + r_p) = H_{\tau 2} = n_2 \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} t_p \Rightarrow n_1 (1 + r_p) = n_2 t_p.$$

Отсюда находим:

$$r_p = \frac{n_2 \cos \theta - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta_t} \quad t_p = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta_t}.$$

A6 ^{0.30} Определите величину $\cos \theta_t$. Ответ выразите через n_1 , n_2 и θ .

Введём ось z , направленную вертикально вниз. Тогда в произвольной точке пространства:

$$E_t \sim \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k}_t \vec{r}\right)\right) = \exp(i(\omega t - k_{tx}x - k_{tz}z)).$$

Рассмотрим слагаемое $-ik_{tz}$:

$$-ik_{tz}z = -ik_t z \cos \theta_t.$$

При этом для $\cos \theta_t$ имеем:

$$\cos \theta_t = \pm \sqrt{1 - \frac{n_1^2 \sin^2 \theta}{n_2^2}} = \pm \frac{i\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}}{n_2}.$$

Затуханию амплитуды волны соответствует знак $-$, поэтому:

Ответ:

$$\cos \theta_t = -\frac{i\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}}{n_2}.$$

A7 ^{0.40} Выражения для r_s и r_p можно представить в следующем виде:

$$r_s = A_s e^{i\delta_p} \quad r_p = A_p e^{i\delta_p}.$$

Определите A_s , A_p , δ_s и δ_p . Ответы выразите через n_1 , n_2 и θ .

С учётом выражения для $\cos \theta_t$ при полном отражении, выражения для r_s и r_p принимают вид:

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta + i \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}}{n_1^2 \cos \theta - i \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}} \quad r_p = \frac{n_2 \cos \theta + \frac{in_1 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}}{n_2}}{n_2 \cos \theta - \frac{in_1 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}}{n_2}}.$$

Модули r_s и r_p равны единице в силу равенств модулей вещественных и мнимых частей числителей и знаменателей. Тогда их запись в показательной форме выглядит следующим образом:

$$r_s = \exp \left(2i \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta - (n_2/n_1)^2}}{\cos \theta} \right) \right).$$

$$r_p = \exp \left(2i \operatorname{arctg} \left(\frac{(n_1/n_2)^2 \sqrt{\sin^2 \theta - (n_2/n_1)^2}}{\cos \theta} \right) \right).$$

Таким образом:

Ответ:

$$A_s = 1 \quad A_p = 1.$$

$$\delta_s = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta - (n_2/n_1)^2}}{\cos \theta} \right) \quad \delta_p = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{(n_1/n_2)^2 \sqrt{\sin^2 \theta - (n_2/n_1)^2}}{\cos \theta} \right).$$

A8
 0.40

Определите δ . Ответ выразите в виде одной обратной тригонометрической функции через θ и $n_{21} = n_2/n_1$.

Воспользуемся выражением для тангенса разности:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Отсюда:

$$\operatorname{tg}(\delta/2) = \frac{\operatorname{tg}(\delta_p/2) - \operatorname{tg}(\delta_s/2)}{1 + \operatorname{tg}(\delta_p/2) \operatorname{tg}(\delta_s/2)} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2} (n_{21}^{-2} - 1)}{\cos \theta \left(1 + \frac{(\sin^2 \theta - n_{21}^2) n_{21}^{-2}}{\cos^2 \theta} \right)}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\operatorname{tg}(\delta/2) = \frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2} (n_{21}^{-2} - 1)}{\sin^2 \theta (n_{21}^{-2} - 1)} = \frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{\sin^2 \theta}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$\delta = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{\sin^2 \theta} \right).$$

B1
 0.10

При каких значениях острого угла α ромба Френеля электромагнитная волна будет испытывать полное отражение от граней ромба Френеля BC и AD ? Выразите ответ через n и рассчитайте его в градусах с точностью до четырёх значащих цифр.

Угол падения на грани BC и AD будет равен α , поэтому должно выполняться условие:

$$n \sin \alpha \leq 1.$$

Таким образом:

Ответ:

$$\alpha \in [\arcsin(1/n); \pi/2) = [41.47^\circ; 90^\circ).$$

В2^{0.40}

При каких значениях угла $\alpha = \alpha'$ с помощью ромба Френеля можно получить круговую поляризацию из линейной? Выразите ответы через n и рассчитайте их в градусах с точностью до четырёх значащих цифр.

При каждом полном отражении между p -поляризацией и s -поляризацией возникает сдвиг фаз, равный $\pi/4$, поэтому:

$$\operatorname{tg}(\delta/2) = \operatorname{tg}(\pi/8) = \sqrt{\frac{1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}} = \sqrt{2} - 1.$$

Таким образом:

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{\cos \alpha' \sqrt{\sin^2 \alpha' - (1/n)^2}}{\sin^2 \alpha'}.$$

Отсюда:

$$\sin^4 \alpha' (4 - 2\sqrt{2}) - \sin^2 \alpha' (1 + (1/n)^2) + (1/n)^2 = 0$$

Решая квадратное уравнение, получим:

$$\alpha' = \arcsin \sqrt{\frac{1 + (1/n)^2 \pm \sqrt{(1 + (1/n)^2)^2 - 4(1/n)^2(4 - 2\sqrt{2})}}{8 - 4\sqrt{2}}} \approx 48.62^\circ, 54.62^\circ.$$

Отметим, что оба угла удовлетворяют условию, полученному в пункте В1 и являются подходящими.

Ответ:

$$\alpha' = \arcsin \sqrt{\frac{1 + (1/n)^2 \pm \sqrt{(1 + (1/n)^2)^2 - 4(1/n)^2(4 - 2\sqrt{2})}}{8 - 4\sqrt{2}}} \approx 48.62^\circ, 54.62^\circ.$$

В3^{0.30}

Пусть пучок света падает на ромб Френеля по всей площади грани AB . Угол $\alpha = \alpha'$. При каких значениях BC/AB ромб Френеля обращает весь пучок лучей (все лучи, попавшие в ромб Френеля через грань AB , испытывают два полных отражения)? Рассчитайте ответ с точностью до трёх значащих цифр.

Воспользуемся методом развёртки.

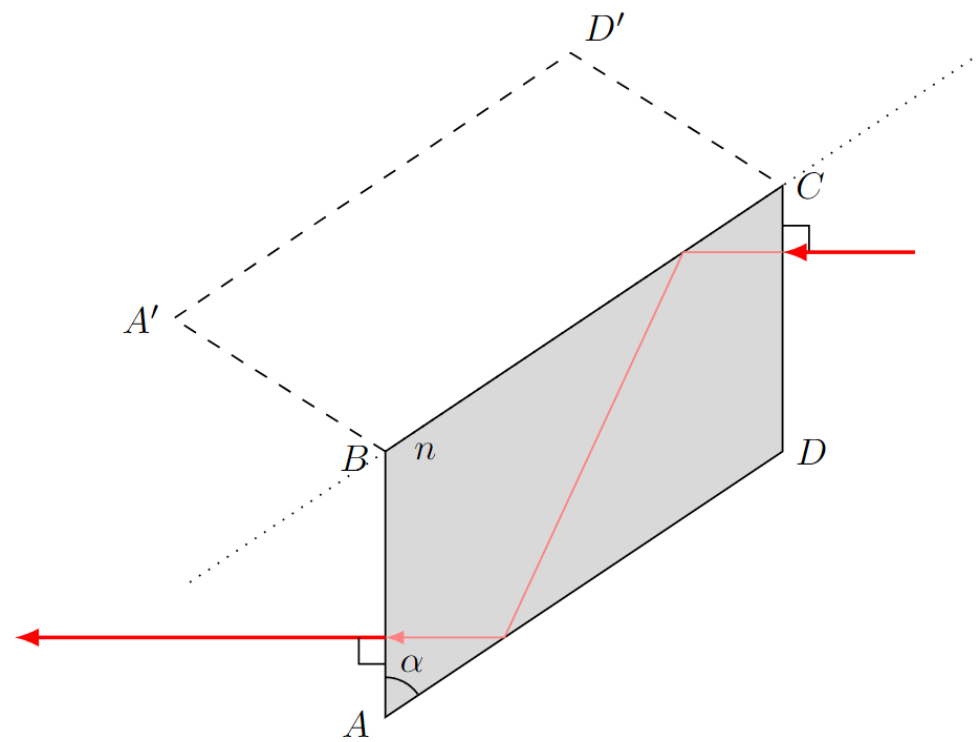
Ромб Френеля обращает весь пучок лучей при условии:

$$BC \cos \alpha + AB \cos 2\alpha - AB = 0 \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$\frac{BC}{AB} = \begin{cases} 1.70 & \text{при } \alpha' = 48.62^\circ \\ 2.30 & \text{при } \alpha' = 54.62^\circ \end{cases}$$



B4^{0.10} При каких значениях угла α ромба Муни электромагнитная волна будет испытывать полное отражение от граней ромба Френеля BC и CD ? Выразите ответ через n и рассчитайте его в градусах с точностью до четырёх значащих цифр.

Угол падения на грани BC и CD будет равен α , поэтому должно выполняться условие:

$$n \sin \alpha \leq 1.$$

Таким образом:

Ответ:

$$\alpha \in [\arcsin(1/n); \pi/2) = [41.47^\circ; 90^\circ).$$

B5^{0.30} При каких значениях угла $\alpha = \alpha'$ с помощью ромба Муни можно получить круговую поляризацию из линейной? Выразите ответы через n и рассчитайте их в градусах с точностью до четырёх значащих цифр.

Поскольку количество отражений равняется двум, ответ для данного пункта совпадает с ответом на пункт B2:

Ответ:

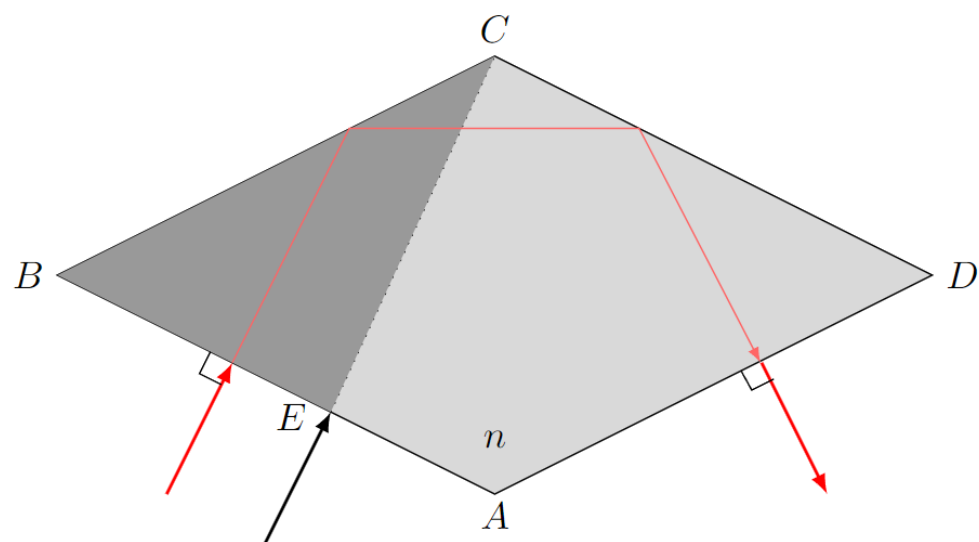
$$\alpha' = \arcsin \sqrt{\frac{1 + (1/n)^2 \pm \sqrt{(1 + (1/n)^2)^2 - 4(1/n)^2(4 - 2\sqrt{2})}}{8 - 4\sqrt{2}}} \approx 48.62^\circ, 54.62^\circ.$$

B6^{0.30} Пусть угол $\alpha = \alpha'$. Определите максимально возможное значение γ отношения площади поперечного сечения пучка, падающего на грань AB , к площади грани AB , если ромб Муни обращает весь пучок лучей (все лучи, попавшие в ромб Муни через грань AB , испытывают два полных отражения). Рассчитайте ответ с точностью до трёх значащих цифр.

Лучи испытывают по два полных отражения при условии их первого попадания на грань BC . Пусть E – точка грани AB , после прохождения которой луч попадает в точку C . Тогда положение точки E определяется соотношением:

$$BE/BC = BE/AB = \cos \alpha.$$

При фиксированном значении α максимальное отношение площади поперечного сечения пучка к площади грани AB равно отношению $BE/AB = \cos \alpha$. Имеем:



Ответ:

$$\gamma_{max} = \begin{cases} 0.661 & \text{при } \alpha' = 48.62^\circ \\ 0.579 & \text{при } \alpha' = 54.62^\circ \end{cases}$$

C1^{0.30}

Покажите справедливость следующих соотношений:

$$r'_1 = -r_1 \quad 1 - r_1^2 = t_1 t'_1.$$

Пусть ψ – угол преломления падающей волны. Тогда ψ равен углу падения волны с волновым вектором $\vec{k}'$ на границу раздела сред с показателями преломления n_1 и n , а угол преломления равен θ .

В случае s -поляризации имеем:

$$r_{1s} = \frac{n_1 \cos \theta - n \cos \psi}{n_1 \cos \theta + n \cos \psi} \quad r'_{1s} = \frac{n \cos \psi - n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + n \cos \psi}.$$

В случае p -поляризации имеем:

$$r_{1p} = \frac{n \cos \theta - n_1 \cos \psi}{n \cos \theta + n_1 \cos \psi} \quad r'_{1p} = \frac{n_1 \cos \psi - n \cos \theta}{n \cos \theta + n_1 \cos \psi}.$$

Таким образом, в обоих случаях равенство $r'_1 = -r_1$ является выполненным.

Определим t'_1 в случае обеих поляризаций:

$$t'_{1s} = \frac{2n \cos \psi}{n_1 \cos \theta + n \cos \psi} \quad t'_{1p} = \frac{2n \cos \psi}{n_1 \cos \psi + n \cos \theta}.$$

При этом для t_{1s} и t_{1p} имеем:

$$t_{1s} = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + n \cos \psi} \quad t_{1p} = \frac{2n_1 \cos \theta}{n \cos \theta + n_1 \cos \psi}.$$

Отсюда:

$$1 - r_{1s}^2 = \frac{4nn_1 \cos \theta \cos \psi}{(n_1 \cos \theta + n \cos \psi)^2} = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + n \cos \psi} \cdot \frac{2n \cos \psi}{n_1 \cos \theta + n \cos \psi} = t_{1s} t'_{1s}.$$

$$1 - r_{1p}^2 = \frac{4nn_1 \cos \theta \cos \psi}{(n \cos \theta + n_1 \cos \psi)^2} = \frac{2n_1 \cos \theta}{n \cos \theta + n_1 \cos \psi} \cdot \frac{2n \cos \psi}{n \cos \theta + n_1 \cos \psi} = t_{1p} t'_{1p}.$$

Таким образом, равенство $1 - r_1^2 = t_1 t'_1$ является выполненным.

C2^{0.60}

Выразите E_r и E через E_1 , E' , r_1 , r'_1 , t_1 и t'_1 .

Если бы волна с напряжённостью электрического поля E' отсутствовала, то комплексные амплитуды $E_r^{(1)}$ и $E^{(1)}$ были бы следующими:

$$E_r^{(1)} = r_1 E_1 \quad E^{(1)} = t_1 E_1.$$

Если бы волна с напряжённостью электрического поля E_1 отсутствовала, то комплексные амплитуды $E_r^{(2)}$ и $E^{(2)}$ были бы следующими:

$$E_r^{(2)} = r'_1 E' \quad E^{(2)} = t'_1 E'.$$

Результирующие комплексные амплитуды напряжённостей электрических полей находятся из принципа суперпозиции:

Ответ:

$$E_r = r_1 E_1 + t'_1 E' \quad E = t_1 E_1 + r'_1 E'.$$

СЗ 0.60

Рассуждая аналогично пункту С2, выразите E' и E_t через E , r_2 и t'_2 , n_1 , n_2 , n , k , d и θ . Учтите, что комплексные амплитуды электрических полей в точке O' сдвинуты по фазе относительно соответствующих комплексных амплитуд в точке O .

Поскольку точка O' смещена относительно точки O , комплексные амплитуды $E_{O'}$, $E'_{O'}$ и $E_{O't}$ напряжённостей электрического поля в волнах с волновыми векторами $\vec{k}'$, $\vec{k}$ и $\vec{k}_t$ сдвинуты по фазе относительно E , E' и E_t .

Рассматривая волну с волновым вектором $\vec{k}'$ как отражённую волну с волновым вектором $\vec{k}$, получим:

$$r_2 E e^{-ikd \cos \psi} = E' e^{ikd \cos \psi}.$$

Аналогично рассматривая волну с волновым вектором $\vec{k}_t$ как прошедшую волну с волновым вектором $\vec{k}$, получим:

$$t_2 E e^{-ikd \cos \psi} = E_t e^{-ik_t d \cos \varphi},$$

где φ – угол преломления волны с волновым вектором $\vec{k}$.

Запишем выражения для $\cos \varphi$ и $\cos \psi$:

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}{n} \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}{n_2}.$$

Учтём также соотношение:

$$k_t = \frac{kn_2}{n}.$$

Окончательно:

Ответ:

$$E' = r_2 E \exp \left(-\frac{2ikd \sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}{n} \right)$$

$$E_t = t_2 E \exp \left(\frac{ikd \left(\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} - \sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \right)}{n} \right).$$

С4 0.60

Используя результаты пунктов С1-С3, определите коэффициент отражения $r = E_r/E_1$. Ответ выразите через r_1 , r_2 , n_1 , n , k , d и θ .

Временно будем записывать выражение для E' через E в следующем виде:

$$E' = r_2 E e^{-i\Delta}.$$

Выразим E через E_1 :

$$E = t_1 E_1 + r'_1 E' = t_1 E_1 + E r'_1 r_2 e^{-i\Delta} \Rightarrow E = \frac{t_1 E_1}{1 - r'_1 r_2 e^{-i\Delta}} = \frac{t_1 E_1}{1 + r_1 r_2 e^{-i\Delta}}.$$

Воспользуемся выражением для E_r :

$$E_r = r_1 E_1 + t'_1 E' = r_1 E_1 + \frac{E_1 t_1 t'_1 r_2 e^{-i\Delta}}{1 + r_1 r_2 e^{-i\Delta}} = E_1 \left(r_1 + \frac{r_2 (1 - r_1^2) e^{-i\Delta}}{1 + r_1 r_2 e^{-i\Delta}} \right).$$

Таким образом:

$$r = \frac{r_1 + r_2 e^{-i\Delta}}{1 + r_1 r_2 e^{-i\Delta}}$$

Подставляя Δ , находим:

Ответ:

$$r = \frac{r_1 + r_2 \exp \left(-\frac{2ikd \sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}{n} \right)}{1 + r_1 r_2 \exp \left(-\frac{2ikd \sqrt{n^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}{n} \right)}.$$

С5 0.70

При каком значении толщины пластины d возможно обращение коэффициента отражения в ноль? Ответ выразите через λ_1 , n_1 и n .

При нормальном падении s -поляризация и p -поляризация эквивалентны друг другу, поэтому мы будем рассматривать только s -поляризованную волну. Коэффициенты отражения r_1 и r_2 являются действительными, поэтому для обращения коэффициента отражения в ноль величина $e^{-i\Delta}$ должна быть действительной. Это возможно при:

$$2kd = \pi N \Rightarrow d = \frac{\lambda N}{4}.$$

Свяжем величины λ и λ_1 :

$$\lambda = vT = \frac{2\pi c}{\omega n} \Rightarrow \lambda_1 n_1 = \lambda n.$$

Ответ: Таким образом:

$$d = \frac{\lambda_1 n_1 N}{4n}.$$

C6 ^{0.80} При каких значениях показателя преломления пластины n возможно обращение коэффициента отражения в ноль? Ответ выразите через n_1 и n_2 .

Проанализируем случай нечётных N :

$$r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{n_1 - n}{n_1 + n} = r_2 = \frac{n - n_2}{n + n_2},$$

откуда:

$$n_1 n + n_1 n_2 - n^2 - n_2 n = n_1 n - n_1 n_2 + n^2 - n n_2 \Rightarrow n = \sqrt{n_1 n_2}$$

Проанализируем случай чётных N :

$$r_1 + r_2 = 0 \Rightarrow n_1 n + n_1 n_2 - n^2 - n_2 n = -n_1 n + n_1 n_2 - n^2 + n n_2 \Rightarrow n = 0.$$

Таким образом, возможен только случай нечётных N , и в действительности величина d может принимать только следующие значения:

$$d = \frac{\lambda(1 + 2m)}{4} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}}.$$

Окончательно:

Ответ:

$$n = \sqrt{n_1 n_2}$$

D1 ^{0.20} Чему равен показатель преломления n' просветляющего покрытия? Ответ выразите через n .

Воспользуемся результатом пункта C6:

Ответ:

$$n' = \sqrt{n}.$$

D2 ^{0.50} Чему равно фокусное расстояние линзы f ? Ответ выразите через R и n

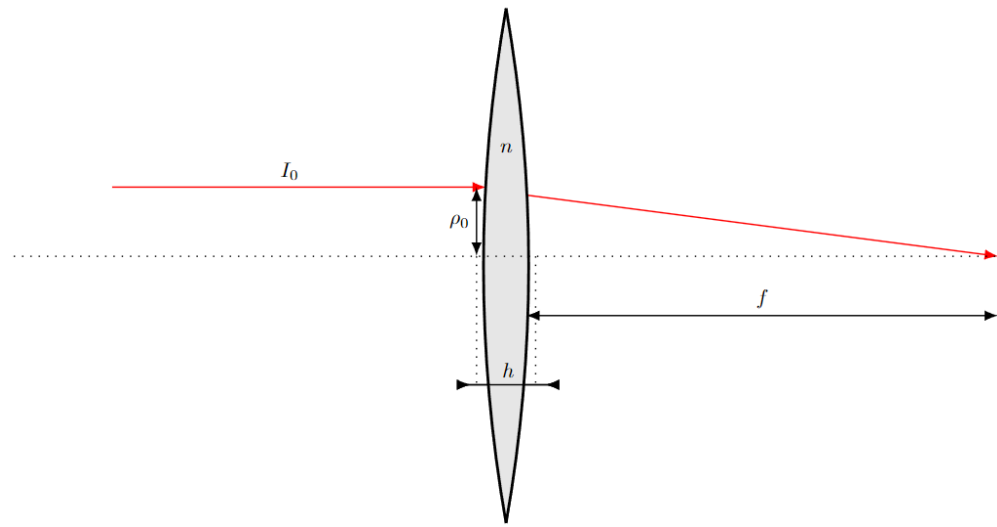
Получим выражение для фокусного расстояния двояковыпуклой линзы с радиусами кривизны поверхности с радиусами кривизны R_1 и R_2 , выполненной из вещества с показателем преломления n .
Воспользуемся принципом таутохронности в параксиальном приближении:

$$l_{\text{опт}} = nh + f = \frac{r^2}{2R_1} + n \left(h - \frac{r^2}{2R_1} - \frac{r^2}{2R_2} \right) + \frac{r^2}{2R_2} + f + \frac{r^2}{2f}.$$

Из независимости от r получим:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Поскольку $R_1 = R_2 = R$:



Ответ:

$$f = \frac{R}{2(n-1)}.$$

ДЗ 1.00

Определите силу F , действующую на линзу. Ответ выразите через I_0 , r , R , n и c .

Возникновение силы, действующей на линзу, обусловлено поворотом волнового фронта после прохождения линзы.

Пусть p_{x0} и p_x – проекции импульса фотона на ось x до и после прохождения линзы. Тогда импульс Δp_x , переданный фотоном линзе, составляет:

$$\Delta p_x = p_{x0} - p_x.$$

Пусть волна падает на линзу на расстоянии ρ от её оси. После прохождения линзы волновой фронт поворачивается на угол $\varphi \approx \rho/f$, поэтому имеем:

$$\Delta p_x(\rho) = p_{x0}(1 - \cos \varphi) \approx \frac{p_{x0}\rho^2}{2f^2}.$$

Пусть n – концентрация фотонов в падающем на линзу пучке, а E – энергия одного фотона. Тогда сила, действующая кольцо с внутренним и внешним радиусами ρ и $\rho + d\rho$ составляет:

$$dF_x = n_0 c \cdot 2\pi\rho d\rho \cdot \Delta p_x(\rho) = \frac{\pi n_0 p_{x0} c}{f^2} \cdot \rho^3 d\rho = \frac{\pi n_0 E}{f^2} \cdot \rho^3 d\rho.$$

При этом $I_0 = n_0 c E$, поэтому:

$$F_x = \frac{\pi I_0}{f^2 c} \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi I_0 r^4}{4f^2 c}.$$

Подставляя f , получим:

Ответ:

$$F = \frac{\pi r^4 I_0 (n-1)^2}{R^2 c}.$$