

-- ??

В любой момент времени наблюдатель в аудитории может подойти к вам и проверить, включен ли датчик Холла. Если вы при этом не проводите измерения, наблюдатель вправе поставить специальную пометку в ваших листах ответов. За каждую пометку вы получаете штраф в 1 балл. Количество пометок не ограничено.

A0 0.20

Зная, что проводимость материала трубки имеет порядок $\sigma \sim 5 \cdot 10^7$ См (Сименс, единица СИ), оцените частоту f_0 , при которой характерная толщина скин-слоя будет равна $h \sim 1$ мм.

Ответ:

$$f_0 = \frac{1}{\pi \mu_0 \sigma h^2} \sim 8 \text{ кГц}$$

A1 0.50

В случае большой толщины скин-слоя ($ah/\delta^2 \ll 1$) получите упрощённую формулу для квадрата модуля отношения полей внутри катушки без трубки и с ней. Предложите линеаризацию, позволяющую найти проводимость материала трубки по отношению полей, если известна её толщина.

Ответ: Квадрат отношения амплитуд поля:

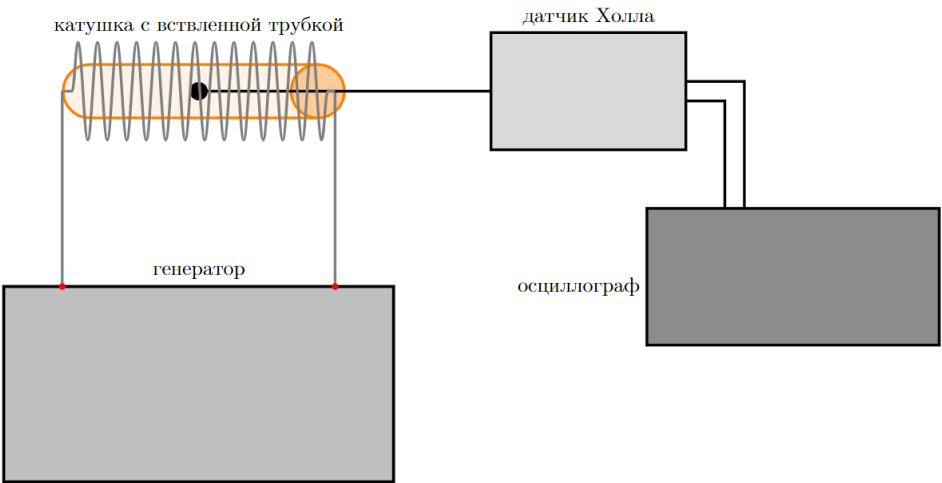
$$\left[\frac{H_0}{H_1} \right]^2 = \left| \operatorname{ch} \alpha h + \frac{1}{2} \alpha a \operatorname{sh} \alpha h \right|^2 \approx \left| 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 a h \right|^2 = |1 + i \pi f \sigma \mu_0 a h|^2 = 1 + \pi^2 f^2 \sigma^2 \mu_0^2 a^2 h^2.$$

Таким образом, удобная линеаризация – это $\left[\frac{H_0}{H_1} \right]^2 (f^2)$, её угловой коэффициент равен $k = \pi^2 \mu_0^2 a^2 h^2 \sigma^2$.

A2 0.50

Предложите схему установки, позволяющую определить отношение амплитуд H_0/H_1 при известной частоте f путём одновременного измерения не более двух величин с помощью осциллографа. Приведите расчётные формулы.
Примечание: В качестве ответа принимаются рисунки, схемы и формулы.

Ответ:



A3 1.00

Снимите экспериментальные точки зависимости $[H_0/H_1](f)$.

Учитывая значение $f_0 \sim 5$ кГц, будем измерять отношение полей на частотах от 100 Гц до 1200 Гц. Занесём точки в таблицу:

$f, \text{Гц}$	$U_0, \text{мВ}$	$U_{\text{тр}}, \text{мВ}$	$\left(\frac{U_0}{U_{\text{тр}}} \right)^2$	$f^2, \text{Гц}^2$	$f, \text{Гц}$	$U_0, \text{мВ}$	$U_{\text{тр}}, \text{мВ}$	$\left(\frac{U_0}{U_{\text{тр}}} \right)^2$	$f^2, \text{Гц}^2$
100	216	210	1,06	10000	1000	186	166	1,26	1000000
200	212	208	1,04	40000	1100	181	162	1,25	1210000
300	210	202	1,08	90000	1200	179	154	1,35	1440000
400	209	198	1,11	160000	1300	174	148	1,38	1690000
500	206	196	1,10	250000	1400	169	140	1,46	1960000
600	203	190	1,14	360000	1500	161	134	1,44	2250000

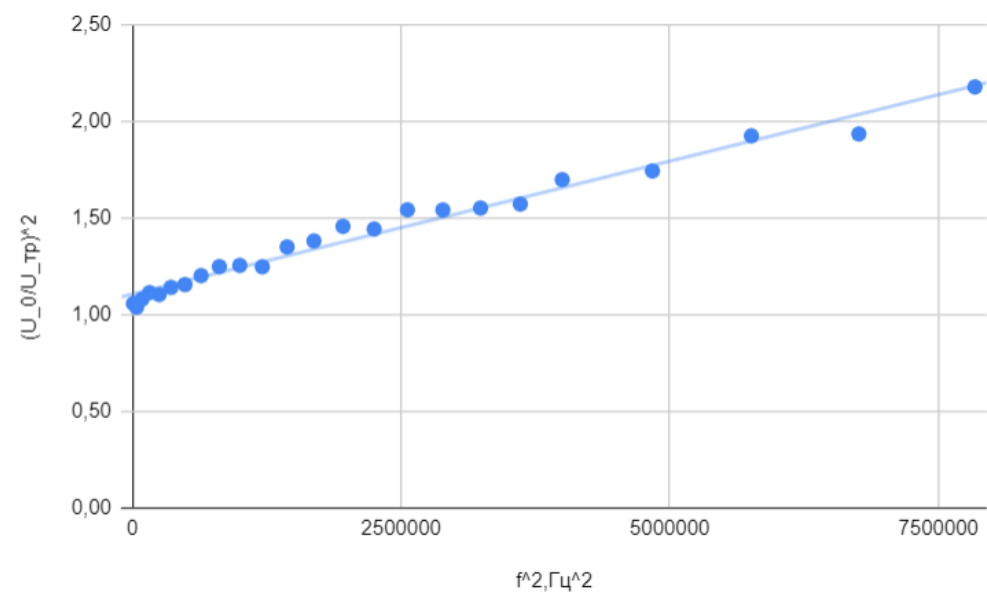
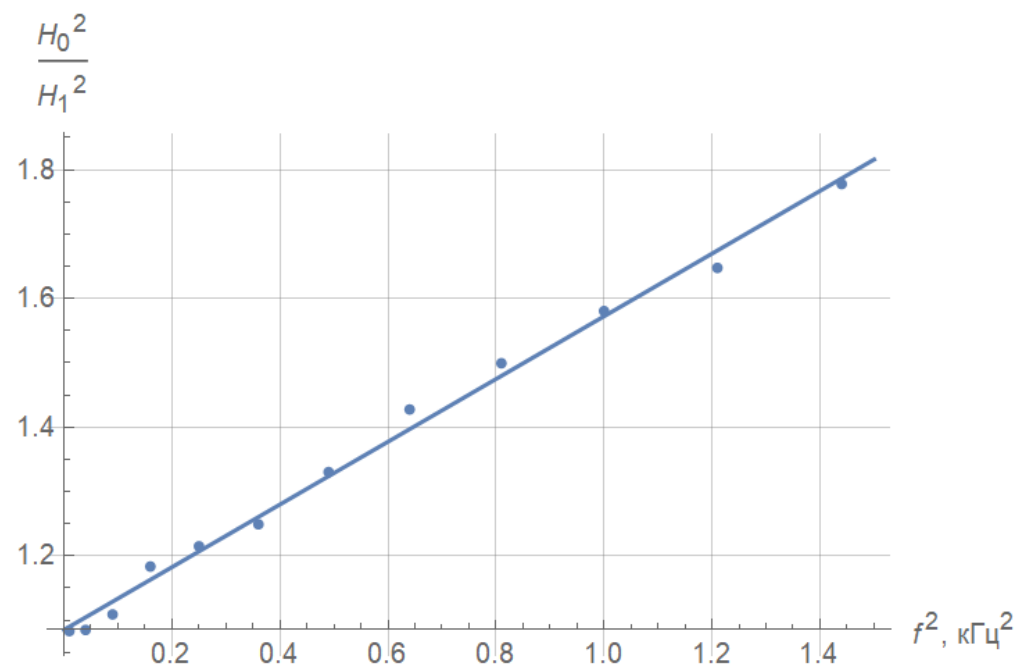
700	200	186	1,16	490000	1600	159	128	1,54	2560000
800	193	176	1,20	640000	1700	154	124	1,54	2890000
900	190	170	1,25	810000	1800	152	122	1,55	3240000

$f, \text{Гц}$	$U_0, \text{мВ}$	$U_{\text{тр}}, \text{мВ}$	$\left(\frac{U_0}{U_{\text{тр}}}\right)^2$	$f^2, \text{Гц}^2$	$f, \text{Гц}$	$U_0, \text{мВ}$	$U_{\text{тр}}, \text{мВ}$	$\left(\frac{U_0}{U_{\text{тр}}}\right)^2$	$f^2, \text{Гц}^2$
1900	148	118	1,57	3610000	3600	108	71	2,31	12960000
2000	146	112	1,70	4000000	3800	104	68	2,34	14440000
2200	140	106	1,74	4840000	4000	102	62	2,71	16000000
2400	136	98	1,93	5760000	4200	100	59	2,87	17640000
2600	128	92	1,94	6760000	4400	94	57	2,72	19360000
2800	124	84	2,18	7840000	4600	92	55	2,80	21160000
3000	120	81	2,19	9000000	5000	88	50	3,10	25000000
3200	116	76	2,33	10240000	5500	87	47	3,43	30250000
3400	112	73	2,35	11560000	6000	84	44	3,64	36000000

A4^{0.80} Линеаризуйте зависимость и постройте график. Отсюда определите проводимость σ исследуемого материала. Оцените графически погрешность полученного результата.

Пересчитаем точки и занесём в таблицу выше. Построим график:

Ответ:



Угловой коэффициент графика $k = (4.87 \pm 0.6) \cdot 10^{-7} \text{ Гц}^{-2}$

Ответ:

$$\sigma = \frac{\sqrt{k}}{\pi\mu_0 a h} = (44.0 \pm 2.8) \text{ МСм}$$

A5 ^{1.80} Найдите, при какой частоте $f_{cr,A}$ экспериментальное значение $[H_0/H_1]^2$ впервые окажется в 1.5 раза меньше теоретического. Найдите теоретически толщину скин-слоя $\delta_{cr,A}$ при этой частоте. Определите отношение $\delta_{cr,A}/h$. Оно является универсальной величиной и понадобится в части Е.

B1 ^{0.50} Упростив выражение для отношения комплексных амплитуд поля внутри и вне трубки, получите выражение для тангенса разности фаз $\text{tg } \psi$ полей внутри и снаружи трубки в случае $h \ll \delta \ll a$.

Используя ранее полученную в A1 формулу $\frac{H_0}{H_1} = 1 + i\pi\sigma\mu_0 a h f$, получим

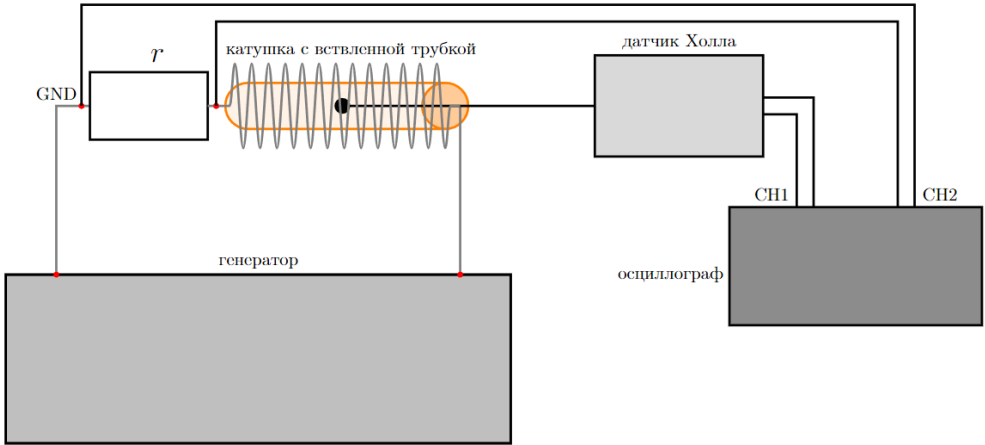
$$\text{tg } \psi = \frac{\text{Im}\left(\frac{H_0}{H_1}\right)}{\text{Re}\left(\frac{H_0}{H_1}\right)} = \pi\sigma\mu_0 a h f$$

B2 ^{0.50} Предложите схему установки, позволяющую определить тангенс разности фаз $\text{tg } \psi$ между током в катушке и полем внутри трубки при известной частоте f путём одновременного измерения не более двух величин с помощью осциллографа. Приведите расчётные формулы.
Примечание: В качестве ответа принимаются рисунки, схемы и формулы.

Подсоединим генератор к катушке, один из каналов осциллографа к датчику Холла, а второй канал - к резистору 1 Ом, встроенному в катушку. Искомую разность фаз теперь можно измерять осциллографом

В данной части есть несколько указаний к настройке оборудования:

- Нужно пользоваться усреднением показаний осциллографа в диапазоне от 16 до 128 измерений
- Нужно настроить Trigger осциллографа в режиме без усреднения так, чтобы синусоида была стабильной. В режиме с усреднением неправильная настройка триггера а) может быть незаметной, б) может привести к искажению амплитуды и фазы сигнала
- Магнитное поле Земли и иные посторонние наводки могут внести постоянную поправку к синусоидальному сигналу, снимаемому с датчика Холла. При больших частотах это становится заметным и искажает измерения сдвига фаз. Чтобы этого избежать, нужно использовать режим АС для канала осциллографа, подключенного к датчику Холла, убирающий постоянный вклад в сигнал.
- Для измерения сдвига фаз точнее всего использовать курсоры на максимальном масштабе, позволяющем видеть стабильный сигнал

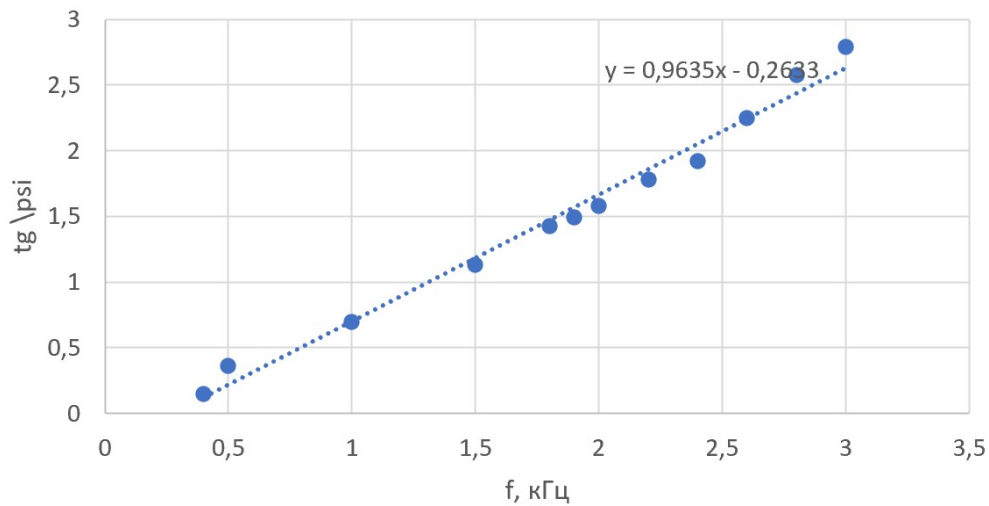


B3 ^{1.00} Снимите зависимость тангенса сдвига фаз от частоты $\text{tg } \psi(f)$.

$f, \text{ Гц}$	$T_{1/2}, \text{ мкс}$	$\Delta t_{shift}, \text{ мкс}$	$\text{tg } \psi$
400	2500	116	0.147
500	1000	110	0.360
1000	500	96.8	0.696
1500	332	89.6	1.133
1800	278	84.8	1.423
1900	264	82.4	1.493
2000	250	80	1.576

2200	228	76.8	1.777
2400	212	73.6	1.920
2600	192	70.4	2.246
2800	178	68	2.573
3000	166	64.8	2.788
3500	144	58.8	3.376
4000	126	54.8	4.823
4500	111	50	6.372
5000	100	46.4	8.804
6000	83	39.6	13.881
6500	77.6	35.6	7.676
7000	72	34.6	16.350
8000	62.5	29.4	10.723
9000	56	25	5.886
10000	50	18	2.125

B4 0.50 Постройте график этой зависимости для линейного участка. Отсюда определите проводимость материала трубки σ . Оцените графически погрешность вашего результата.

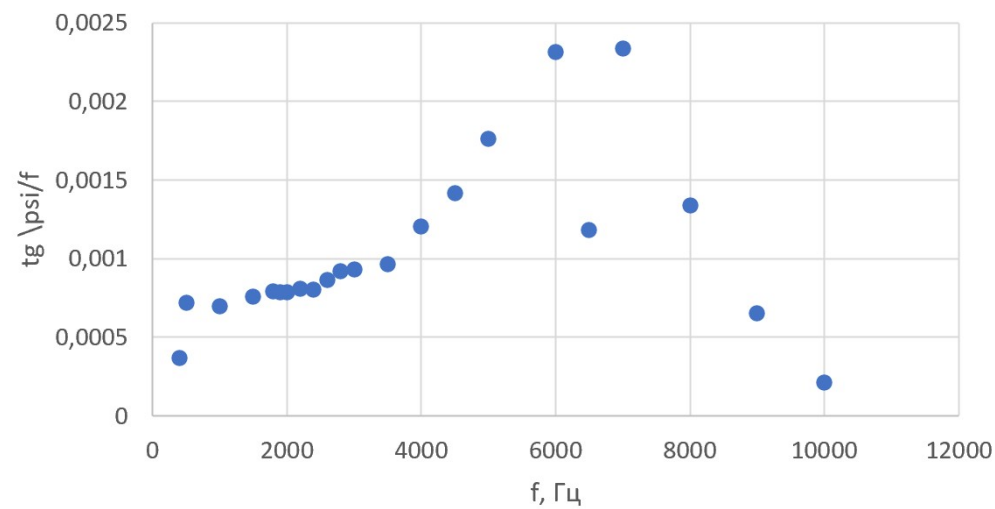


Обозначив угловой коэффициент полученного графика $k = (0.964 \pm 0.02) \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{Гц}}$, получим $\sigma = \frac{k}{\pi \mu_0 a h}$

$$\sigma = (59.2 \pm 1.2) \text{ МСм}$$

B5 0.50 Найдите, при какой частоте $f_{cr,B}$ экспериментальное значение $\text{tg } \psi$ впервые окажется в 2 раза больше теоретического. Найдите теоретически толщину скин-слоя $\delta_{cr,B}$ при этой частоте. Определите отношение δ_{cr}/h . Оно является универсальной величиной и понадобится в части Е.

Для убедительности построим график $\frac{\text{tg } \psi}{f}(f)$. При $f \rightarrow 0$ он стремится к константе, равной коэффициенту наклона прямой, проведенной по теоретической зависимости $\text{tg } \psi(f)$. Тогда из графика легко найти $f_{cr} \approx 4500 \text{ Гц}$



Ответ:

$$f_{cr} \approx 4500 \text{ Гц}$$

$$\delta_{cr} = 0.98 \text{ мм}$$

$$\frac{\delta_{cr}}{h} \approx 1.5$$

C1 0.30 Измерьте как можно точнее сопротивления между контактами r_{12} , r_{23} и r_{13} .

Учитывая сопротивление мультиметра, получим

Ответ:

$$r_{12} = 11.2 \text{ Ом}$$

$$r_{23} = 1.1 \text{ Ом}$$

$$r_{13} = 12.2 \text{ Ом}$$

C2 0.50 Определите сопротивление контактов r_{κ} , а также реальные сопротивления катушки R и резистора r .

$$r_{12} = R + 2r_{\kappa}$$

$$r_{23} = r + 2r_{\kappa}$$

$$r_{13} = R + r + 2r_{\kappa}$$

Откуда получим

Ответ:

$$r_{\kappa} = \frac{r_{12} + r_{23} - r_{13}}{2} = 0.05 \text{ Ом}$$

$$R = 11.1 \text{ Ом}$$

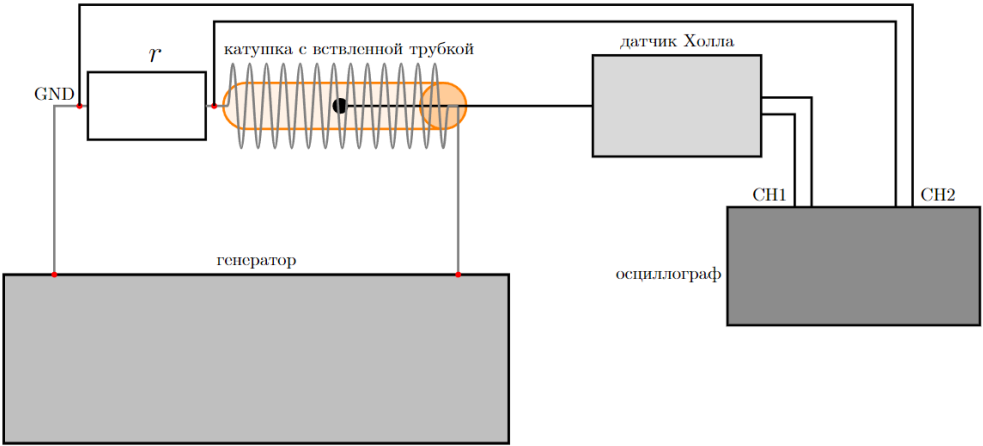
$$r = 1.0 \text{ Ом}$$

C3 0.70 Предложите схему установки, позволяющую определить индуктивность катушки L при известной частоте f путём одновременного измерения не более двух величин с помощью осциллографа. Приведите расчётные формулы.
Примечание: В качестве ответа принимаются рисунки, схемы и формулы.

Поместим трубку в катушку и будем снимать с помощью осциллографа зависимость напряжения u на встроенном резисторе 1 Ом и суммарного напряжения V на катушке+резисторе от частоты. При этом $u = Ir$, $V = I|Z| = I\sqrt{(R+r)^2 + \omega^2 L^2}$, откуда

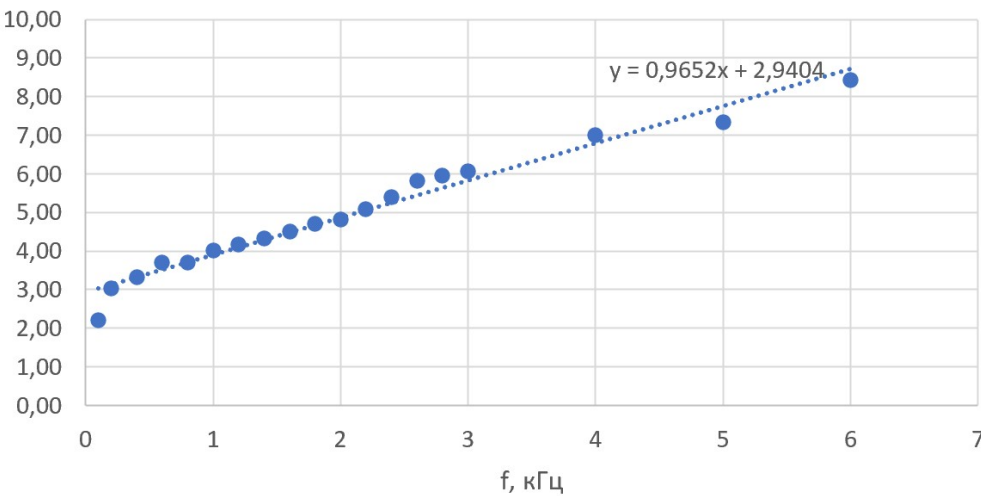
$$\frac{V}{u} = \sqrt{\left(1 + \frac{R}{r}\right)^2 + \frac{\omega^2 L^2}{r^2}}$$

$$L(f) = \frac{r}{2\pi f} \sqrt{\left(\frac{V}{u}\right)^2 - \left(1 + \frac{R}{r}\right)^2}$$



С4^{2.50} Сняв необходимые экспериментальные точки, получите зависимость $L(f)$. Определите $L_{\min}$ и $L_{\max}$. Линеаризовав эту зависимость и построив график, найдите проводимость меди. Оцените графически погрешность полученного результата.

f , Гц	u , В	V , В	L , мГн	$\sqrt{\frac{L_{max}-L}{L-L_{min}}}$
10	0,318	3,84	19,99	0,00
50	0,319	3,92	8,28	1,83
100	0,317	4,08	7,36	2,20
200	0,312	4,48	6,26	3,03
400	0,306	5,92	6,03	3,32
600	0,298	7,44	5,81	3,70
800	0,284	8,96	5,80	3,70
1000	0,272	10,2	5,65	4,02
1200	0,260	11,4	5,59	4,18
1400	0,247	12,4	5,54	4,32
1600	0,234	13,2	5,48	4,51
1800	0,224	14,0	5,42	4,72
2000	0,212	14,6	5,40	4,82
2200	0,202	15,1	5,34	5,07
2400	0,194	15,6	5,27	5,40
2600	0,184	15,8	5,20	5,82
2800	0,176	16,2	5,19	5,95
3000	0,169	16,6	5,17	6,06
4000	0,139	17,8	5,07	7,00
5000	0,117	18,6	5,05	7,34
6000	0,101	19,0	4,98	8,43
7000	0,088	19,0	4,90	113,65
8000	0,080	19,2	4,77	-



Из линеаризованного графика $\sqrt{\frac{L_{max}-L}{L-L_{min}}}(f)$ получим угловой коэффициент $k = \pi a h \mu_0 \sigma = (0.965 \pm 0.03) \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{Гц}}$, откуда $\sigma = \frac{k}{\pi a h \mu_0} = 59,2 \text{ МСм}$

$L_{min} = 4.77 \text{ мГн}$

$L_{max} = 19.99 \text{ мГн}$

$\sigma = (59,2 \pm 1.8) \text{ МСм}$

D1^{0.50} Предложите схему установки, позволяющую измерить сопротивление с учётом указанных выше данных.

Указание: Поскольку сопротивление зависит от частоты, измерение ширины резонансного пика в общем случае может быть затруднительно.

Примечание: В качестве ответа принимаются рисунки, схемы и формулы.

Оценим характерные импедансы имеющихся элементов при $f \sim 10^6$ Гц

$$|Z_L| = 2\pi fL \approx 60 \text{ Ом}$$

$$|Z_C| = \frac{1}{2\pi fC} \sim 1 \text{ кОм}$$

Сопротивление генератора $R_{gen} \approx 50 \text{ Ом}$, поэтому последовательное соединение его в цепь или параллельное соединение с катушкой окажет значительное влияние на импеданс системы. Подключение генератора параллельно конденсатору фактически отключит конденсатор от цепи, в силу $R_{gen} \ll |Z_C|$. Поэтому генератор нужно подключать параллельно трубке, имеющей сопротивление, меньшее R_{gen} .

Предполагая, что осциллограф имеет паразитную ёмкость, сравнимую со средней ёмкостью выданных конденсаторов ($\sim 100 \text{ пФ}$), в пределе большой добротности (то есть маленьких сопротивлений $\sim 1 \text{ Ом} - 10 \text{ Ом}$) получим, что подключение осциллографа параллельно трубке не повлияет на характеристики цепи, снова в силу $R_{gen} \ll |Z_C|$.

Наконец, заметим что подключение осциллографа параллельно катушке нецелесообразно, так как усложнит расчеты. Подсоединив осциллограф параллельно конденсатору, легко учесть постоянную поправку C_{osc} к емкости системы

$$C_{eq} = C + C_{osc}$$

D2 0.50 Реальные ёмкости конденсаторов немного отличаются от указанных на них значений. Измерьте их выданным мультиметром и запишите реальные значения C_{real} ёмкости в таблицу в листе ответов.

C , пФ	47	68	100	220	330	470	680	1000	1500	2200
C_{real} , пФ	47	59	96	229	313	451	731	1260	2260	3040

D3 2.00 Найдите добротность Q и резонансную частоту f_{res} для всех номиналов используемых конденсаторов.

Обозначим напряжение на трубке V_R , а на конденсаторе V_C . Добиваясь максимума V_C , можно измерить резонансную частоту f_{res} для каждого номинала конденсатора.

В формуле для добротности Q избавимся от неизвестной ёмкости C , учтя, что $f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, получим

$$Q = \frac{2\pi f_{res}L}{R}$$

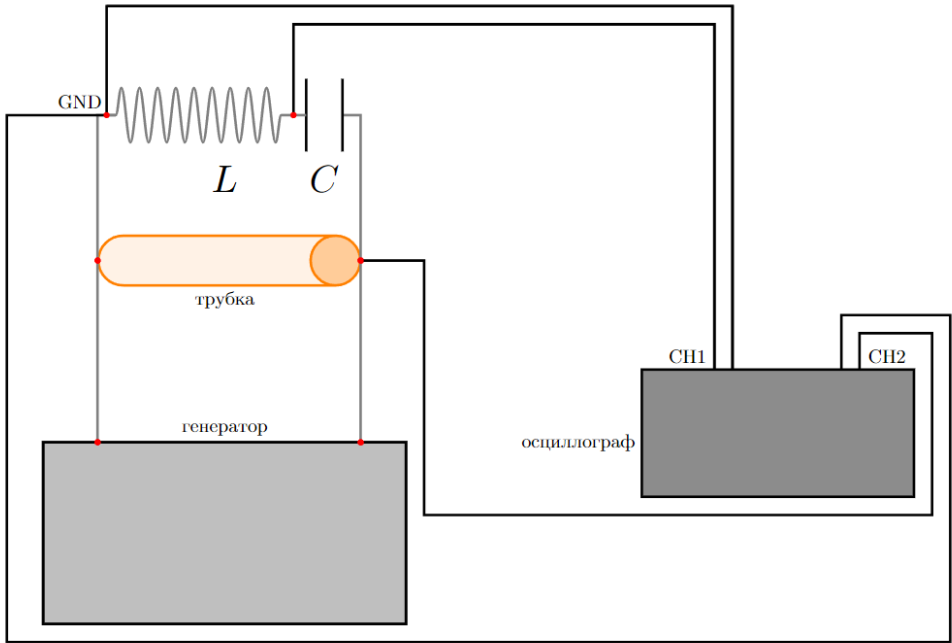
Привычный способ нахождения добротности с использованием ширины резонансной кривой в данном случае не применим, так как в силу скин-эффекта сопротивление цепи R напрямую зависит от f . Однако при резонансной частоте имеем

$$V_R = IR$$

$$V_C = \frac{I}{2\pi f_{res}C} = 2\pi I f_{res}L$$

$$Q = \frac{V_C}{V_R}$$

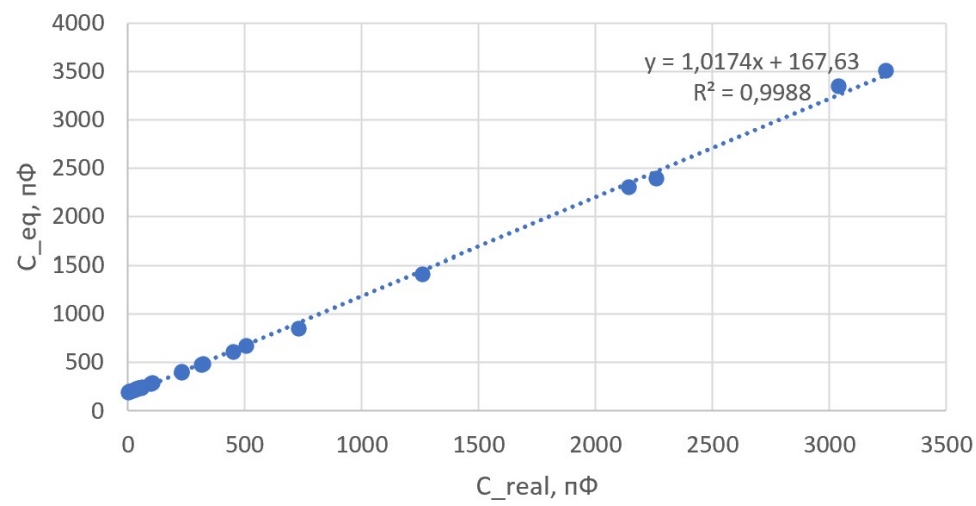
$$R = \frac{2\pi f_{res}L}{Q}$$



C , пФ	f_{res} , МГц	C_{eq} , пФ	V_C , В	V_R , В	Q	R , Ом
2	3,68	187	25,4	8,92	2,85	81,2
5	3,63	192	25,3	8,84	2,86	79,7
10	3,6	195	25	8,72	2,87	78,9
22	3,5	207	24,6	8,56	2,87	76,5
31	3,43	215	24,4	8,4	2,90	74,2
34	3,4	219	24,2	8,4	2,88	74,2
47	3,33	228	20,8	7,88	2,64	79,3
50	3,33	228	21,4	8,32	2,57	81,3
57	3,28	235	20,8	8,16	2,55	80,9
59	3,26	238	20,8	7,76	2,68	76,4
96	3,01	280	21,8	7,16	3,04	62,1
105	2,96	289	21,8	7,42	2,94	63,3
229	2,53	396	14,7	6,28	2,34	67,9
231	2,52	399	14,9	6,58	2,26	69,9
313	2,32	471	12,9	5,88	2,19	66,4
322	2,3	479	12,9	6,08	2,12	68,1
451	2,04	609	11,4	5,28	2,16	59,4
506	1,95	666	10,9	5,24	2,08	58,9
731	1,73	846	8,16	4,56	1,79	60,7
1260	1,34	1411	6,88	3,52	1,95	43,1
2140	1,05	2298	4,34	3,01	1,44	45,8
2260	1,03	2388	4,14	2,96	1,40	46,3
3040	0,87	3347	4,18	2,56	1,63	33,5
3240	0,85	3506	4,16	2,5	1,66	32,1

D4^{1.00} По измеренной резонансной частоте рассчитайте эквивалентную ёмкость C_{eq} , включенную в цепь. Линеаризовав зависимость $C_{eq}(C_{real})$ и построив график, найдите «паразитную ёмкость» осциллографа C_{osc} .

$$C_{eq} = \frac{1}{4\pi^2 f_{res}^2 L}$$
$$C_{eq} = C_{real} + C_{osc}$$



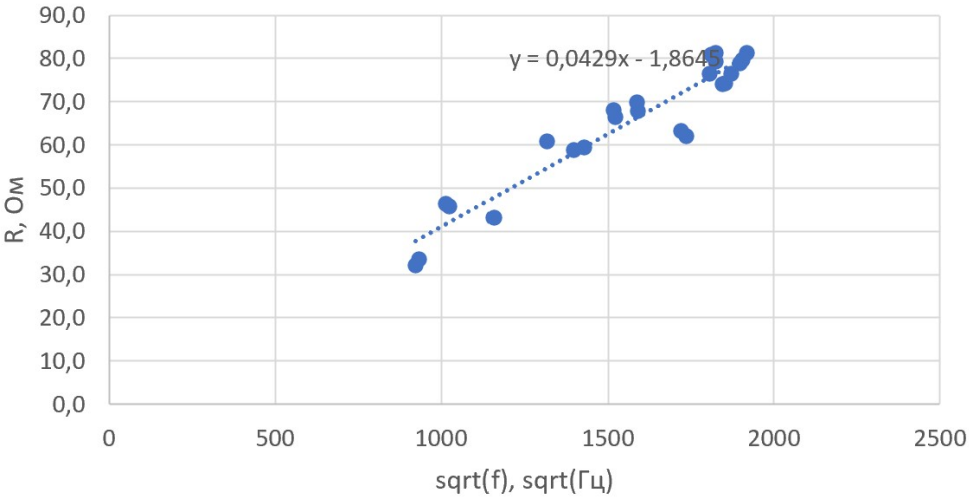
Ответ:

$C_{osc} = (168 \pm 30) \text{ пФ}$

D5 1.50 Предложите линейризацию, позволяющую найти проводимость. Постройте график и найдите значение σ . Графически оцените погрешность полученного результата.

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{2\pi a \delta} = \frac{l}{2a} \sqrt{\frac{\mu_0 f}{\pi \sigma}}$$

Линеаризация $R(\sqrt{f})$



Обозначив угловой коэффициент этой линеаризации $k = 0.0429 \frac{\text{Ом}}{\sqrt{\text{Гц}}}$, получим $\sigma = \frac{\mu_0 l^2}{4\pi a^2 k^2} \approx 0.01 \text{ См}$. При этом погрешность σ сравнима с самой σ , поэтому это не более чем оценочное значение

Ответ:

$$\sigma = 0.01 \text{ См}$$

D6 0.50 Укажите возможную причину такого результата. Обоснуйте свой ответ количественными оценками.

Возможная причина такого нереалистичного значения σ - проявление скин-эффекта не только в трубке, но и во всех проводах системы. Для подтверждения этого предположения оценим среднее значение $\frac{L}{a}$ для всех имеющихся проводов.

$$\frac{L}{a} = 2k \sqrt{\frac{\pi \sigma}{\mu_0}} \sim 10^6$$

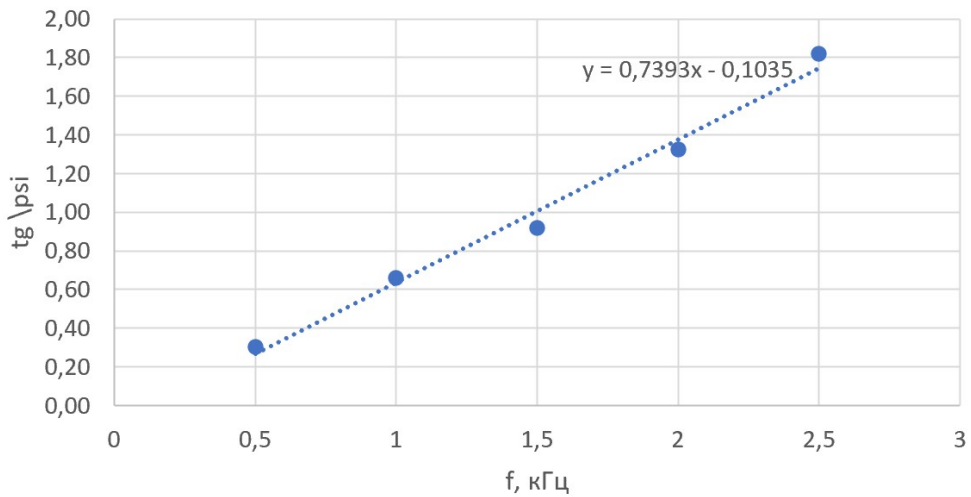
где k - коэффициент пропорциональности в зависимости $R(\sqrt{f})$. Такое значение действительно возможно, например при суммарной длине проводов $L \sim 10 \text{ м}$, среднем радиусе $a \sim 0.01 \text{ мм}$.

E1 1.80 Методом, описанным в части А, определите толщину трубки и её проводимость. Величину δ_{cr}/h возьмите из А. Графически оцените погрешность вашего результата.

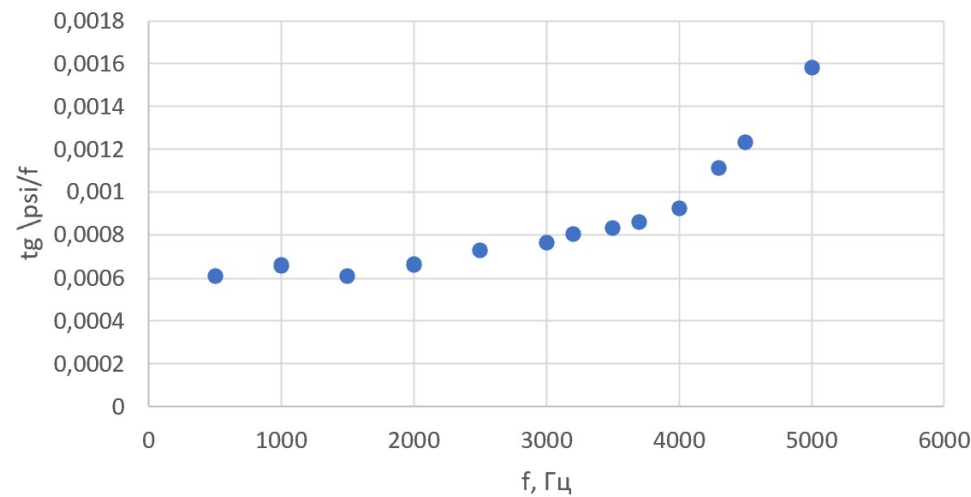
E2 1.80 Методом, описанным в части В, определите толщину трубки и её проводимость. Величину δ_{cr}/h возьмите из В5. Графически оцените погрешность вашего результата.
Какой из методов, по вашему, точнее?

$f, \text{ Гц}$	$T_{1/2}, \text{ мкс}$	$\Delta t_{shift}, \text{ мкс}$	$\text{tg } \psi$
500	1000	94	0,30
1000	500	92,8	0,66
1500	335	79,2	0,92
2000	250	73,6	1,33
2500	200	68	1,82

3000	167	61,6	2,29
3200	156	59,6	2,57
3500	144	56,8	2,90
3700	135	54,4	3,18
4000	125	52	3,70
4300	116	50,4	4,79
4500	111	49,2	5,55
5000	100	46	7,92



Коэффициент полученного линейного участка равен $k = \pi\mu_0\sigma ah = (0.739 \pm 0.03) \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{Гц}}$



Из графика $\frac{\text{tg } \psi}{f}(f)$ найдем $f_{cr} = (4300 \pm 100)$ Гц. Обозначив $\alpha \equiv \frac{\delta_{cr}}{h} = 1.5$

$$k = \pi\mu_0\sigma a\delta_{cr}/\alpha = \sqrt{\frac{\pi\mu_0\sigma}{f_{cr}} \frac{a}{\alpha}}$$

$$\sigma = \frac{f_{cr}}{\pi\mu_0} \left(\frac{k\alpha}{a}\right)^2$$

$$h = \frac{a}{kf_{cr}\alpha^2}$$

Ответ:

$$\sigma = (37.2 \pm 3.9) \text{ МСм}$$

$$h = (0.84 \pm 0.05) \text{ мм}$$

ЕЗ^{0.40}

Определите материал трубки. Используя его табличное значение σ , уточните результат для толщины трубки.

С хорошей точностью найденная σ совпадает с σ_{Al} , поэтому можно сделать вывод, что трубка сделана из алюминия. Уточним толщину трубки:

$$h_{ex} = \frac{k}{\pi\mu_0\sigma a} = 0.89 \text{ мм}$$

Ответ:

$$h_{ex} = (0.89 \pm 0.04) \text{ мм}$$