

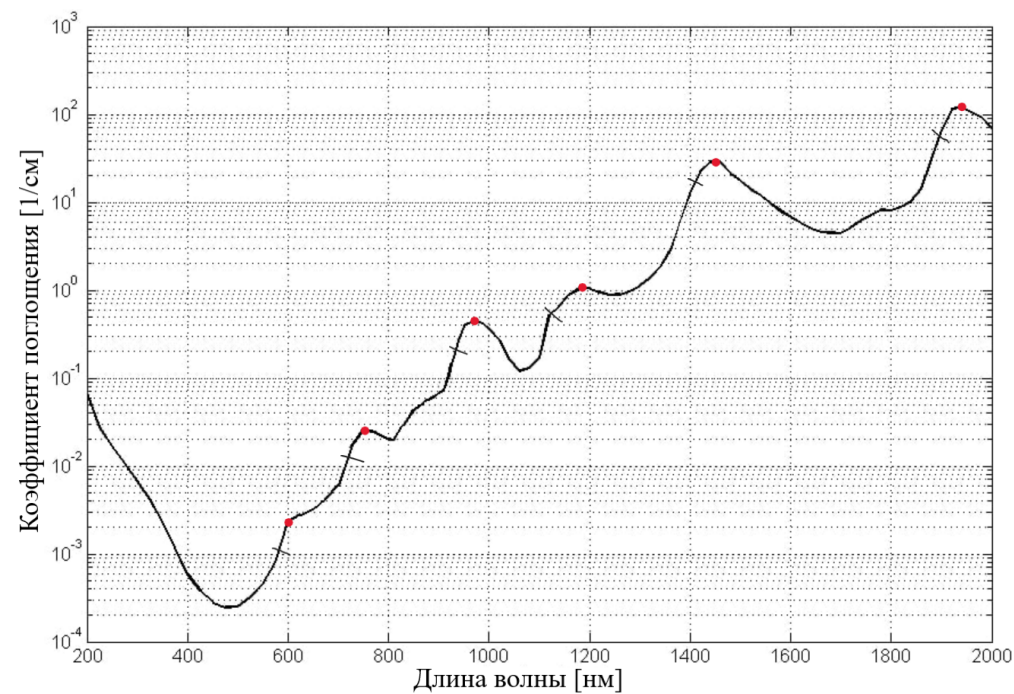
A1 0.30 Укажите, какая из мод имеет наименьшую собственную частоту. Обоснуйте свой ответ.

Моды 1 и 3 идентичны с точностью до разности фаз, равной π и представляют собой синфазные и противофазные колебания двух независимых осцилляторов соответственно. Поэтому частоты двух этих мод совпадают, а частота моды 2 оказывается наименьшей.

Ответ: Мода 2

A2 0.90 Найдите длины волн λ и частоты ν , соответствующих локальным максимумам коэффициента поглощения.

Локальные максимумы отмечены точками на рисунке ниже.



λ , нм	ν , ТГц	$\Delta\lambda$, нм	$\Delta\nu$, ТГц	m'	m
600	500	18	15	8	10
750	400	36	20	6	8
970	309	48	16	4	6
1190	252	72	16	3	5
1450	207	48	7	2	4
1940	155	36	3	1	3

A3 1.20 Найдите полуширину $\Delta\nu$ локальных максимумов коэффициента поглощения.

В таблице выше

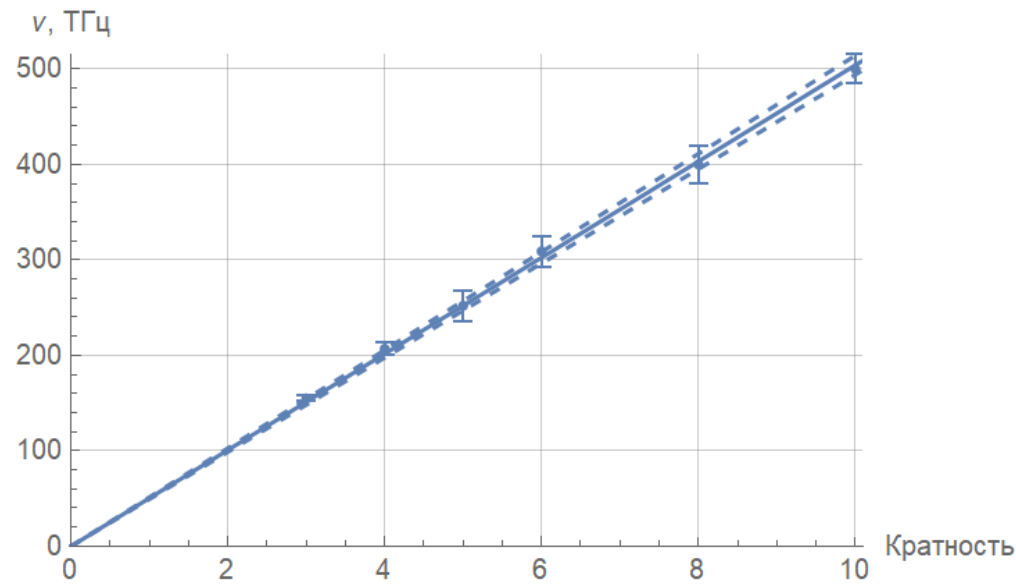
A4 1.20 На основе полученных результатов определите кратность частот, соответствующих локальным максимумам, а также найдите основную резонансную частоту ν_0 колебаний молекулы воды. Графически определите погрешность ν_0 .

Так как минимальная разность между ближайшими частотами ~ 50 ТГц, то предположим что основная частота $\nu_0 \approx 50$ ТГц. Примем кратность наименьшей частоты равной 1. При этом кратность частот имеет вид:

$$\nu(m) = \nu_0(m' + m_0)$$

где m_0 – постоянный сдвиг.

Вычислим предполагаемые кратности (в таблице выше) и построим график $\nu(m')$ и вычислим m_0 и ν_0 из параметров фитирующей прямой.



Ответ:

$$m_0 = 2$$

$$\nu_0 = 50.4 \pm 1 \text{ ТГц}$$

B1 1.50 Получите приближённое выражение для $\mathcal{J}(\psi)$, считая углы ψ малыми.

Для начала заметим что из малости ψ следует малость ρ , так как

$$\frac{\psi}{2} = \arcsin n\rho - \arcsin \rho \approx (n-1)\rho$$

Однако данной точности разложения мало, так как при этом $\mathcal{J}(\psi)$ примерно постоянна. Раскладывая до следующего порядка

$$\frac{\psi}{2\rho} \approx (n-1) + \frac{n^3-1}{6}\rho^2$$

$$\frac{d\psi}{2d\rho} \approx (n-1) + \frac{n^3-1}{2}\rho^2$$

$$\sin \psi \approx \psi - \frac{\psi^3}{6}$$

$$\frac{1}{\mathcal{J}} \approx 4(n-1)^2 \left(1 + \frac{n^2+n+1}{2}\rho^2\right) \left(1 + \frac{n^2+n+1}{6}\rho^2\right) \left(1 - \frac{\psi^2}{6}\right) \approx$$

$$\approx 4(n-1)^2(1 + 2n\rho^2)$$

Подставляя ρ

$$\mathcal{J}(\psi) \approx \frac{1}{4(n-1)^2} \left(1 - \frac{n\psi^2}{2(n-1)^2}\right)$$

Ответ:

$$\mathcal{J}(\psi) \approx \frac{1}{4(n-1)^2} \left(1 - \frac{n\psi^2}{2(n-1)^2}\right)$$

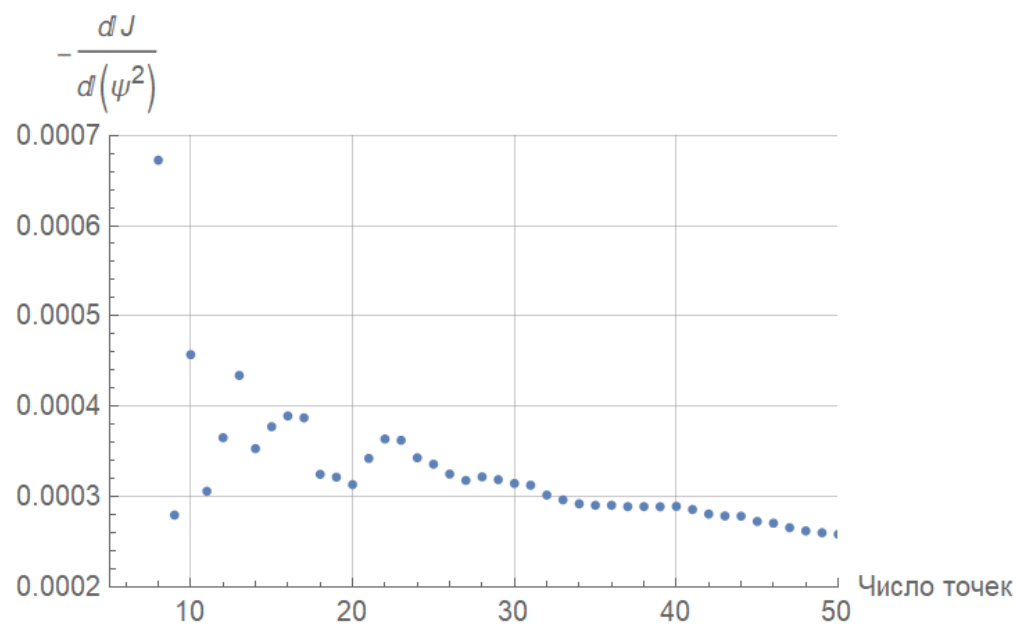
B2 5.00 Линеаризуйте полученную зависимость и найдите показатель преломления жидкости n .

Указание: Не обязательно использовать все точки, чтобы получить **хороший** результат.

При попытке описать зависимость $\mathcal{J}(\psi^2)$ линейной функцией возникают две проблемы:

- Если брать слишком мало точек, данные оказываются зашумлены;
- Если брать много точек, зависимость перестаёт быть линейной.

В качестве подтверждения можно посмотреть на график модуля углового коэффициент зависимости $\mathcal{J}(\psi^2)$ от числа взятых точек:



Сразу видно, что брать меньше 25 точек бессмысленно, а при более чем 40 точках нужно учитывать нелинейность. Чтобы понять по исходным данным, в какой момент придётся учитывать нелинейность, можно заметить, что в диапазоне $\psi \in [20^\circ; 30^\circ]$ у зависимости $\mathcal{J}(\psi)$ наблюдается излом, что невозможно получить в приближении предыдущего пункта.

Для 40 точек получим значение (ψ в радианах):

$$\alpha = -\frac{1}{\mathcal{J}} \frac{d\mathcal{J}}{d(\psi^2)} \Big|_{\psi=0} = 2.081.$$

Из линеаризации $\mathcal{J}(\psi) = -k\psi^2 + b$ следует $\alpha \equiv \frac{k}{b} = \frac{n}{2(n-1)^2}$, откуда выражение для n

$$n = \frac{1}{4\alpha}(4\alpha + 1 + \sqrt{8\alpha - 1}) \implies$$

Ответ:

$$n = 1.59$$

Эта величина отличается от показателя преломления воды. Это сделано специально, чтобы участники получали ответ честно.