

A1^{1.20} Примем за ноль потенциальную энергию системы в поле тяжести Земли W_p в начальном положении. Определите зависимость потенциальной энергии W_p от массы m . Ответ выразите через M , λ , g и m .

Длина x размотавшейся части ленты составляет:

$$x = \frac{M - m}{\lambda}.$$

Тогда для потенциальной энергии W_p получим:

$$W_p = -(M - m)g \cdot \frac{x}{2} - mgx = -\frac{(M + m)gx}{2} \Rightarrow W_p = -\frac{(M^2 - m^2)g}{2\lambda}.$$

Ответ:

$$W_p = -\frac{(M^2 - m^2)g}{2\lambda}$$

A2^{0.80} Выразите кинетическую энергию E_k данной системы через m и v при $m \gg \lambda R$ (здесь R — **неизвестный** радиус цилиндра).

Кинетической энергией обладают только цилиндр и находящаяся на нём часть ленты. Данная система представляет собой однородной тонкостенный цилиндр массой m . Из теоремы Кёнига имеем:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + E_{k(\text{отн})}.$$

где $E_{k(\text{отн})}$ – кинетическая энергия данной системы в системе отсчёта, связанной с её центром масс.

Поскольку лента нерастяжима, точка O касания её вертикального участка и цилиндра неподвижна. Тогда угловая скорость цилиндра равна $\omega = v/R$, где R – радиус цилиндра. Отсюда в системе отсчёта центра масс имеем:

$$E_{k(\text{отн})} = \frac{m\omega^2 R^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow E_k = mv^2.$$

Ответ:

$$E_k = mv^2$$

A3^{0.40} Получите зависимость скорости v движения оси цилиндра от массы m . Ответ выразите через M , λ , g и m .

Из результатов пунктов A1 и A2 находим:

Ответ:

$$v = \sqrt{\frac{g}{2\lambda} \left(\frac{M^2}{m} - m \right)}$$

A4^{0.40} Определите зависимость импульса p данной системы от массы m . Ответ выразите через M , λ , g и m .

Импульс системы $p = mv$, поэтому:

Ответ:

$$p = \sqrt{\frac{g(M^2 m - m^3)}{2\lambda}}$$

A5^{1.50} Определите зависимость ускорения a оси цилиндра от массы m . Ответ выразите через g , M и m .

Для ускорения оси цилиндра имеем:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{v dv}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dx}.$$

Таким образом:

$$a = -\frac{g}{4\lambda} \left(\frac{M^2}{m^2} + 1 \right) \frac{dm}{dx} \Rightarrow a = \frac{g}{4} \left(1 + \frac{M^2}{m^2} \right).$$

Ответ:

$$a = \frac{g}{4} \left(1 + \frac{M^2}{m^2} \right)$$

A6^{1.60}

Определите зависимость силы натяжения T_1 ленты в точке её крепления к вертикальной стенке от массы m . Ответ выразите через g , M и m .

Из теоремы о движении центра масс:

$$\frac{dp}{dt} = Mg - T_1.$$

Таким образом:

$$T_1 = Mg - \frac{dp}{dt} = Mg - \sqrt{\frac{g}{2\lambda}} \cdot \frac{(M^2 - 3m^2)}{2\sqrt{M^2m - m^3}} \frac{dm}{dt} = Mg + \sqrt{\frac{g}{2\lambda}} \cdot \frac{(M^2 - 3m^2)\lambda v}{2\sqrt{M^2m - m^3}}.$$

Подставляя v , находим:

Ответ:

$$T_1 = Mg + \frac{(M^2 - 3m^2)g}{4m}$$

A7^{0.80}

Определите зависимость силы натяжения ленты T_O в точке, в которой вертикальный участок ленты касается цилиндра, от массы m . Ответ выразите через g , M и m .

Поскольку вертикальный участок ленты неподвижен, для силы её натяжения в точке O имеем:

$$T_O = T_1 - (M - m)g \Rightarrow T_O = \frac{mg}{4} \left(1 + \frac{M^2}{m^2} \right).$$

Ответ:

$$T_O = \frac{mg}{4} \left(1 + \frac{M^2}{m^2} \right)$$

B1^{1.70}

Запишите условие, связывающее силу натяжения T_O , скорость v и линейную плотность λ , при котором лента не отрывается от поверхности цилиндра. Считайте силу натяжения ленты постоянной по всей длине первого оборота лентой цилиндра. Также считайте выполненным соотношение $v^2 \gg gR$.

Перейдём в поступательно движущуюся систему отсчёта, связанную с осью цилиндра. В данной системе отсчёта элементы ленты движутся по окружности радиусом R со скоростью v . На них действуют сила натяжения ленты T , силы трения, сила нормальной реакции поверхности, а также сила тяжести и сила инерции, возникающая из-за перехода в неинерциальную систему отсчёта.

Нормальное ускорение элементов ленты равно $a_n = v^2/R$. Поскольку $v^2 \gg gR$, а ускорение оси цилиндра того же порядка, что и g , силой тяжести и силой инерции можно пренебречь, поскольку $a_n \gg g$.

Выделим на поверхности цилиндра элемент ленты с углом охвата $d\varphi$. Пусть действующая на него сила нормальной реакции равна dN , а сила натяжения ленты на рассматриваемом участке равна T . Тогда из второго закона Ньютона для выделенного элемента ленты в проекции на направление нормали получим:

$$Td\varphi - dN = a_n dm = \frac{v^2}{R} \cdot \lambda R d\varphi = \lambda v^2 d\varphi.$$

Условие отсутствия отрыва составим в том, что $dN > 0$. Тогда имеем:

$$T > \lambda v^2.$$

Но поскольку $T \approx T_O$:

Ответ:

$$T_O > \lambda v^2$$

В2 0.40

При каком значении m_c лента начинает отрываться от поверхности цилиндра? Ответ выразите через M .

Найдём значения m , при которых условия отсутствия отрыва выполняется:

$$T_O = \frac{mg}{4} \left(1 + \frac{M^2}{m^2} \right) > \lambda v^2 = \frac{mg}{2} \left(\frac{M^2}{m^2} - 1 \right) \Rightarrow m < \frac{M}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$m_c = \frac{M}{\sqrt{3}}$$

В3 1.20

Определите значения $T_1(m_c)$, $T_O(m_c)$ и $a(m_c)$. Ответы выразите через M и g .

Подставляя m_c , получим:

Ответ:

$$a(m_c) = g$$

Ответ:

$$T_1(m_c) = Mg$$

Ответ:

$$T_O(m_c) = \frac{Mg}{\sqrt{3}}$$

В4 0.40

Определите значение $v(m_c)$. Ответ выразите через M , g и λ .

После подстановки m_c получим:

Ответ:

$$v(m_c) = \sqrt{\frac{Mg}{\lambda\sqrt{3}}}$$

В5 1.60

Какие значения может принимать $v(m_c)$ при фиксированной длине ленты L , если к указанному моменту она не успевает полностью размотаться?

Ответ выразите через g и L .

Поскольку лента полностью не разматывается к моменту отрыва, её масса составляет не меньше, чем $M(1 - 1/\sqrt{3})$ и не больше, чем M . Тогда её линейная плотность лежит в пределах:

$$\frac{M}{L} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) < \lambda < \frac{M}{L}.$$

Таким образом:

Ответ:

$$v_{m_c} \in \left(\sqrt{\frac{gL}{\sqrt{3}}}; \sqrt{\frac{gL}{\sqrt{3}-1}} \right)$$