

A1<sup>0.50</sup> Выразите молярную теплоёмкость используемого газа в изобарном процессе  $C_P$  и в изохорном процессе  $C_V$  через  $R$  и  $\gamma$ .

Для идеального газа имеем

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$
$$C_P - C_V = R$$

Ответ:

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$
$$C_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

A2<sup>0.50</sup> Выразите отношения  $p_2/p_1$  и  $V_2/V_1$  (обозначения рис. 1) через  $T$ ,  $t_1$  и  $t$ .

Так как процесс совершается над фиксированным количеством идеального газа, то из уравнения состояния:

$$\frac{p_1 V_1}{T - t} = \frac{p_1 V_2}{T - t_1} = \frac{p_2 V_2}{T} = \nu R$$

Отсюда получим:

Ответ:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T}{T - t_1}$$
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T - t_1}{T - t}$$

A3<sup>1.00</sup> Выразите работу  $A_r$  через  $\nu$ ,  $R$ ,  $T$ ,  $t_1$  и  $t$ .

Работа газа за один цикл численно равна площади цикла в координатах  $PV$ . Используя результаты A2:

$$A_r = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = p_1 V_1 \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left( \frac{V_2}{V_1} - 1 \right) = \frac{\nu R t_1 (t - t_1)}{T - t_1}$$

Ответ:

$$A_r = \frac{\nu R t_1 (t - t_1)}{T - t_1}$$

A4<sup>0.50</sup> Определите  $\chi$  в момент, когда температура газа равна  $T - \tau$ . Ответ выразите через  $\tau$ ,  $T$ .

Для тепловой машины, работающей по циклу Карно, известно соотношение:

$$\frac{Q_-}{Q_+} = \frac{T_-}{T_+}$$

В случае обратного цикла Карно  $Q_-$  – теплота, полученная от холодильника температурой  $T_-$ ,  $Q_+$  – теплота, отданная нагревателю температурой  $T_+$ .

В данной задаче газ в исследуемом цикле холоднее окружающей среды, поэтому он является холодильником, а окружающая среда – нагревателем. Таким образом,  $T_- = T - \tau$ ,  $T_+ = T$

Помимо этого, в силу первого начала термодинамики:

$$Q_+ = Q_- + A_{\text{хм}}$$

Отсюда для холодильного коэффициента имеем

$$\chi = \frac{Q_-}{Q_+ - Q_-} = \frac{T_-}{T_+ - T_-} = \frac{T - \tau}{\tau}$$

Ответ:

$$\chi = \frac{T - \tau}{\tau}$$

A5 1.50 Определите  $A_{\text{хм}}$ . Ответ выразите через  $\nu, R, \gamma, T, t_1$  и  $t$ .

По условию изменением температуры газа за один цикл Карно можно пренебречь, поэтому для одного цикла Карно имеем:

$$\delta A_{\text{хм}} = \frac{\delta Q_-}{\chi} = \frac{\tau}{T - \tau} \delta Q_-$$

где температура газа равна  $T - \tau$ .

В исследуемом цикле тепло от газа отводится при изохорном и изобарном охлаждении. В случае изохорного охлаждения:

$$\begin{aligned} \delta Q'_- &= \nu C_V d\tau \\ \delta A'_{\text{хм}} &= \nu C_V \frac{\tau d\tau}{T - \tau} \\ A'_{\text{хм}} &= \nu C_V \int_0^{t_1} \frac{\tau d\tau}{T - \tau} = \nu C_V \left( T \int_0^{t_1} \frac{d\tau}{T - \tau} - \int_0^{t_1} d\tau \right) = \nu C_V \left( T \ln \left( \frac{T}{T - t_1} \right) - t_1 \right) \end{aligned}$$

Для изобарного охлаждения:

$$\begin{aligned} \delta A''_{\text{хм}} &= \nu C_P \frac{\tau d\tau}{T - \tau} \\ A''_{\text{хм}} &= \nu C_P \int_{t_1}^t \frac{\tau d\tau}{T - \tau} = \nu C_P \left( T \ln \left( \frac{T - t_1}{T - t} \right) - (t - t_1) \right) \end{aligned}$$

Подставив  $C_V, C_P$ :

Ответ:

$$A_{\text{хм}} = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \left( \gamma T \ln \left( \frac{T - t_1}{T - t} \right) - \gamma(t - t_1) + T \ln \left( \frac{T}{T - t_1} \right) - t_1 \right)$$

A6 1.00 Выразите  $\eta$  для описанной системы через  $x, \gamma$  и  $y$ . Вычислите его значение для  $\gamma = 5/3, x = 0.5, y = 0.5$ .

Ответ:

$$\eta = \frac{xy^2(1-x)(\gamma-1)}{(1-xy) \left( \gamma \ln \left( \frac{1-xy}{1-y} \right) - \gamma y(1-x) + \ln \left( \frac{1}{1-xy} \right) - xy \right)} \approx 0.187$$

A7 1.00 Найдите зависимость  $\eta(x)$  при  $y \ll 1$ . Ответ выразите через  $\gamma$  и  $x$ .

При необходимости вы можете использовать формулу:  $\ln(1 + \xi) \approx \xi - \xi^2/2$  при  $\xi \ll 1$ .

Разложим логарифмы в знаменателе до второго порядка:

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{1-xy}{1-y} \right) &= \ln(1-xy) - \ln(1-y) \approx -xy - \frac{x^2y^2}{2} + y + \frac{y^2}{2} \\ \ln \left( \frac{1}{1-xy} \right) &= -\ln(1-xy) \approx xy + \frac{x^2y^2}{2} \end{aligned}$$

Приводя подобные и сокращая на  $y^2$ :

$$\eta \approx \frac{2x(1-x)(\gamma-1)}{(1-xy)(\gamma-x^2(\gamma-1))}$$

Слагаемое  $xy$  в знаменателе можно отбросить в силу  $y \ll 1$

Ответ:

$$\eta(x) = \frac{2x(1-x)(\gamma-1)}{\gamma-x^2(\gamma-1)}$$

A8 1.00

Определите, при каком  $x$  эффективность  $\eta$  будет максимальна. Ответ выразите через  $\gamma$ .

Приравнявая производную к нулю, получаем:

$$(1-2x)(\gamma-x^2(\gamma-1)) = 2x^2(1-x)(1-\gamma)$$

Приводя подобные:

$$x^2(\gamma-1) - 2\gamma x + \gamma = 0$$

Корень со знаком «+» приводит к  $x > 1$ , что соответствует отрицательной температуре газа. Поэтому:

Ответ:

$$x = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma}}{\gamma - 1} \approx 0.56$$

A9 1.00

Найдите максимально возможную эффективность  $\eta_{max}$ . Ответ выразите через  $\gamma$ . Вычислите ее значение для  $\gamma = 5/3$ .

Подставив найденный в пункте A8  $x$  и приводя подобные:

Ответ:

$$\eta_{max} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \approx 0.225$$