

A1^{0.50} Выразите r через ρ , R и L .

Пусть α – угол падения луча на пузырь, β – угол, который радиус, проведенный в точку падения, составляет с горизонталью, θ – угол падающего луча с горизонталью. Тогда:

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \frac{\rho}{R} \\ \tan \theta &= \frac{\rho}{L - R \cos \beta} \\ \alpha &= \beta + \theta\end{aligned}$$

Угол, который отраженный луч составляет с горизонталью, тогда равен $\alpha + \beta = 2\beta + \theta$. Следовательно:

$$r = \rho + (L - R \cos \beta) \tan 2\beta + \theta$$

Теперь воспользуемся приближением $\rho < R \ll L$. Тогда $\theta \ll 1$, откуда:

$$\begin{aligned}\theta &\approx \frac{\rho}{L} \\ \tan 2\beta + \theta &\approx \tan 2\beta + \frac{\theta}{\cos^2 2\beta} \\ r &= L \tan 2\beta + \left(\rho - R \cos \beta \tan 2\beta + \frac{L\theta}{\cos^2 2\beta} - \frac{\theta R \cos \beta}{\cos^2 2\beta} \right)\end{aligned}$$

Все слагаемые в скобках имеют по порядку не более $R \ll L$. Таким образом:

$$r = L \tan 2\beta = \frac{2L\rho\sqrt{R^2 - \rho^2}}{R^2 - 2\rho^2}$$

Ответ:

$$r = \frac{2L\rho\sqrt{R^2 - \rho^2}}{R^2 - 2\rho^2}$$

A2^{1.00} Выразите малый элемент площади объекта dS через параметры соответствующего участка изображения. В ответ могут входить величины ρ , R , L , а также дифференциал расстояния $d\rho$ и дифференциал полярного угла $d\varphi$.

Малый элемент площади в полярных координатах:

$$dS = r \, dr \, d\varphi = \frac{d\varphi}{2} d(r^2)$$

Найдем $d(r^2)$:

$$\begin{aligned}r^2 &= \frac{4L^2\rho^2(R^2 - \rho^2)}{(R^2 - 2\rho^2)^2} \\ d(r^2) &= \frac{8L^2R^4\rho}{(R^2 - 2\rho^2)^3} d\rho\end{aligned}$$

Для удобства введем безразмерную величину $\delta = \frac{\rho}{R}$. Тогда:

$$dS = \frac{4L^2\delta \, d\delta}{(1 - 2\delta^2)^3} d\varphi$$

Ответ:

$$dS = \frac{4L^2R^4\rho}{(R^2 - 2\rho^2)^3} d\rho \, d\varphi$$

A3^{2.50} В листе ответов приведена фотография пузыря в натуральный размер. Как можно точнее найдите площадь объекта на стене. Численное значение $L = 1$ м.

Примечание: Удобно представить ответ как площадь под некоторым графиком. Миллиметровая бумага для построения графика приведена в листе ответов.

Разобьем имеющуюся площадь на сегменты колец радиусом δ и толщиной $d\delta$. Обозначим угол, под которым виден этот сегмент из центра $\psi(\delta) = \int d\varphi$. Тогда для одного кольца:

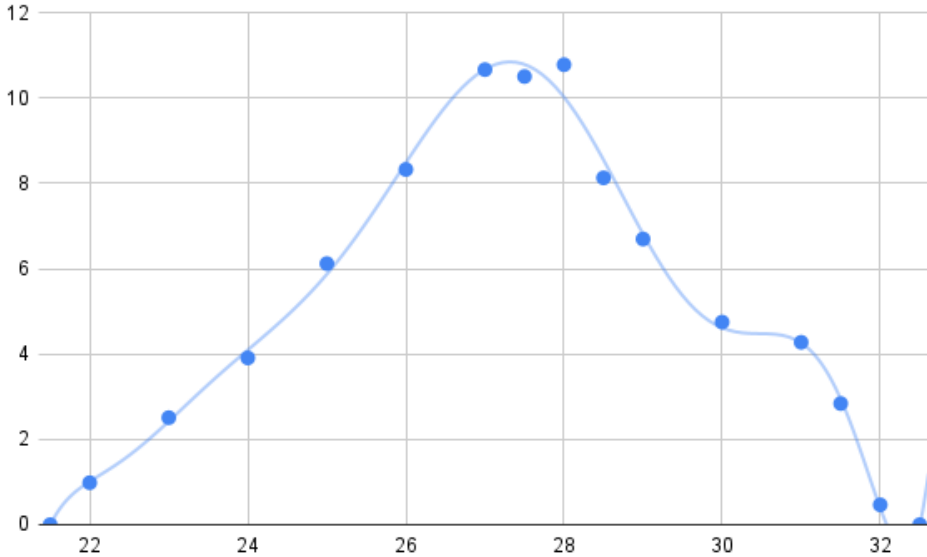
$$dS = 4L^2 \frac{\delta \, \psi(\delta)}{(1 - 2\delta^2)^3} d\delta = L^2 k(\delta) \psi(\delta) d\delta$$

Итого имеем:

$$S = \int_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} k(\delta) \psi(\delta) d\delta$$

Данный интеграл можно вычислить как площадь под графиком $k\psi(\delta)$.

$\delta, \frac{1}{60}$	$\psi, \frac{\pi}{180} \text{ рад}$	$k \cdot \psi$
22.0	15	1.0
23.0	33	2.5
24.0	44	3.9
25.0	58.5	6.1
26.0	67	8.3
27.0	71.5	10.7
27.5	64	10.5
28.0	59.5	10.8
28.5	40.5	8.1
29.0	30	6.7
30.0	17	4.8
31.0	12	4.3
31.5	7	2.8
32.0	1	0.5



Численное интегрирование приводит к $S = 59 \cdot \frac{1}{60} \text{ м}^2$ (здесь учтено, что $L = 1 \text{ м}$)

Ответ:

$$S = 0.98 \text{ м}^2$$

B1 1.00 Получите теоретическую формулу для площади $S(x)$ изображения квадрата. Считайте, что $x - x_0 > F + a/2$.

Из формулы тонкой линзы очевидно, что ближняя к линзе сторона квадрата изображается в дальнее от линзы основание трапеции. Пусть L_1 – расстояние от ближнего основания трапеции до линзы, а L_2 – от дальнего до линзы. Пусть также $2b$ и $2c$ – меньшее и большее основание трапеции соответственно. Тогда:

$$S(x) = (b + c)(L_2 - L_1)$$

Из геометрических построений луча, идущего через фокус:

$$\begin{aligned} b &= (L_1 - F) \tan \alpha = (L_1 - F) \frac{a}{2F} \\ c &= (L_2 - F) \tan \alpha = (L_2 - F) \frac{a}{2F} \\ S(x) &= \frac{a}{2F} (L_1 + L_2 - 2F)(L_2 - L_1) \end{aligned}$$

Определим L_1, L_2 из формулы тонкой линзы:

$$\frac{1}{L_1} + \frac{1}{x - x_0 + \frac{a}{2}} = \frac{1}{F} \Rightarrow L_1 = \frac{F(x - x_0 + \frac{a}{2})}{x - x_0 + \frac{a}{2} - F}$$
$$\frac{1}{L_2} + \frac{1}{x - x_0 - \frac{a}{2}} = \frac{1}{F} \Rightarrow L_2 = \frac{F(x - x_0 - \frac{a}{2})}{x - x_0 - \frac{a}{2} - F}$$
$$L_2 - L_1 = \frac{aF^2}{(x - x_0 - F)^2 - \frac{a^2}{4}}$$
$$L_1 + L_2 - 2F = \frac{2F^2(x - x_0 - F)}{(x - x_0 - F)^2 - \frac{a^2}{4}}$$

Подставляя в выражение для $S(x)$, получим:

Ответ:

$$S(x) = \frac{a^2 F^3 (x - x_0 - F)}{((x - x_0 - F)^2 - \frac{a^2}{4})^2}$$

В2^{1.00} Чтобы зависимость не имела расходимости при $x = 16$ см, её удобно домножить на некоторую функцию $f(x)$, которая в этой точке обращается в 0. Предложите такую функцию. Пересчитайте точки для $f(x)S(x)$.

Учитывая вид исходной функции, расходимость исчезнет при домножении на $(x - 16 \text{ см})^2$. По совместительству можем заключить, что $x_0 + F + a/2 = 16$ см. Пересчитанные значения внесём в таблицу.

Ответ:

$x, \text{ см}$	$S, \text{ см}^2$	$S \cdot (x - 16 \text{ см})^2, \text{ см}^4$	$S \cdot (x - 16 \text{ см})^2, \text{ см}^4 / S_0$	$S(x)f(x)/C$	$a, \text{ см}$	$F, \text{ см}$	$x_0, \text{ см}$
16	—	—	—	1.00	-	-	-
18	440	1780	1.00	0.95	6.9	8.1	4.39
20	94	1500	0.84	0.80	5.0	9.1	4.42
22	36	1280	0.72	0.68	4.7	9.29	4.38
24	17.4	1110	0.63	0.59	4.6	9.36	4.36
26	9.8	980	0.55	0.52	4.5	9.41	4.35
28	6.1	880	0.49	0.47	4.5	9.44	4.34
30	4.0	790	0.44	0.42	4.4	9.47	4.33
32	2.8	720	0.41	0.39	4.4	9.47	4.33
34	2.0	660	0.37	0.35	4.4	9.49	4.32

В3^{1.00} Получите экстраполированное значение $C = f(x)S(x)$ в точке $x = 16$ см.

Примечание: Учтите, что зависимость может не быть линейной в окрестности этой точки

Обозначим $x_0 + F + \frac{a}{2} = 16 \text{ см} = x_1$, $(x - x_1) = \delta$. Тогда:

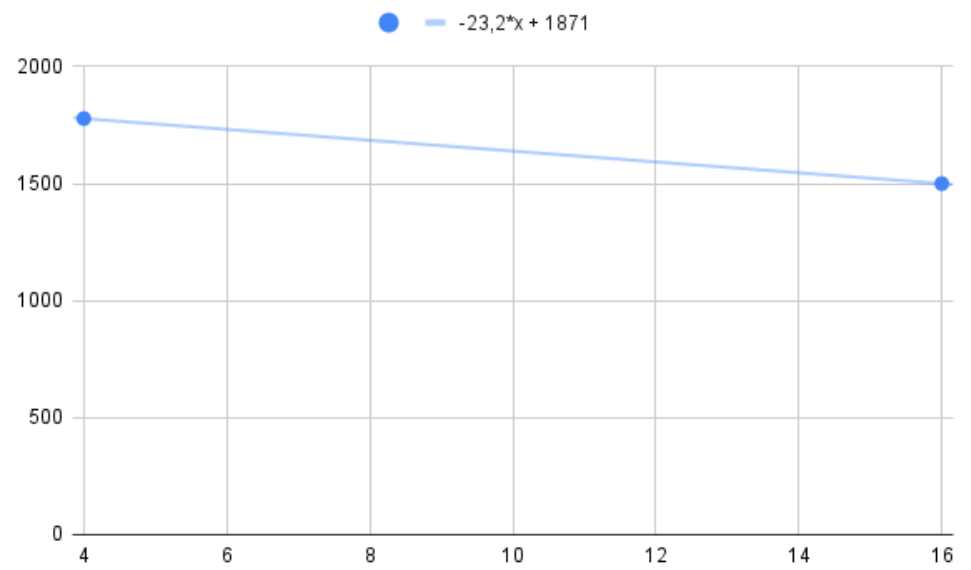
$$S(x)f(x) = \frac{a^2 F^3 (\delta + \frac{a}{2})}{(\delta + a)^2} = \frac{aF^3(1 + \frac{2\delta}{a})}{2(1 + \frac{\delta}{a})^2}$$

Вспользуемся приближением $\delta \ll a$:

$$S(x)f(x) \approx \frac{aF^3}{2} \left(1 + \frac{2\delta}{a}\right) \left(1 - 2\frac{\delta}{a} - \frac{\delta^2}{a^2} + 4\frac{\delta^2}{a^2}\right) \approx \frac{aF^3}{2} \left(1 - \frac{\delta^2}{a^2}\right)$$

Как видно, в окрестности x_1 $S(x)f(x)$ зависит от $x - x_1$ квадратично, поэтому требуется построить график $S(x)f(x)$ от $(x - x_1)^2$. При этом $C = \frac{aF^3}{2}$. Экстраполируя по первым двум точкам, получаем $C = 1870 \text{ см}^4$. По первым трем точкам - 1800 см^4 .

Отметим, что в силу $a \approx 4.5$ см и необходимости условия $\delta \ll a$, точки дальше второй не подходят для экстраполяции: уже третья точка приводит к $\frac{\delta}{a} \sim 1$.



В4 ^{0.50} Пересчитайте точки для $f(x)S(x)/C$.

В5 ^{2.50} Для каждой точки найдите a , F и x_0 . Также приведите в листе ответов усреднённые результаты $\bar{a}$, $\bar{F}$ и $\bar{x}_0$.

В пункте В3 найдено:

$$\frac{S(x)f(x)}{C} = \frac{1 + 2\frac{\delta}{a}}{(1 + \frac{\delta}{a})^2} = A$$

Решая квадратное уравнения относительно $\frac{\delta}{a}$:

$$\frac{\delta}{a} = \frac{1 - A + \sqrt{1 - A}}{A}$$
$$a = \frac{(x - x_1)A}{1 - A + \sqrt{1 - A}}$$

Здесь выбран положительный корень, т.к. используются только точки $x > x_1 = 16$ см.

Далее:

$$C = \frac{aF^3}{2} \Rightarrow F = \left(\frac{2C}{a}\right)^{1/3}$$
$$x_1 = x_0 + F + \frac{a}{2} \Rightarrow x_0 = x_1 - F - \frac{a}{2}$$

Окончательно имеем, приняв точку $x = 18$ см за выброс:

Ответ:

$$\bar{a} = (4.54 \pm 0.19) \text{ см}$$

$$\bar{F} = (9.38 \pm 0.13) \text{ см}$$

$$\bar{x}_0 = (4.35 \pm 0.03) \text{ см}$$