

Road to IPhO

Не ложися на краю (12 баллов)

Данная задача посвящена исследованию движений симметричных волчков – твёрдых тел, имеющих ось симметрии. В части **A** будут получены общие уравнения движения твёрдого тела, в последующих частях будут рассмотрены волчки Эйлера (на который не действуют внешние силы) и Лагранжа (движущийся в постоянном гравитационном поле).

Пусть нижняя точка волчка O , лежащая на оси симметрии, неподвижна, и волчок может свободно вращаться вокруг точки O во всех направлениях. Масса волчка равна m , расстояние от O до центра масс волчка равно l . Для описания движения введём неподвижную систему координат $OXYZ$.

Часть A. Уравнения Эйлера (2.2 балла)

Из механики известно, что движение произвольного твёрдого тела с неподвижной точкой полностью определяется единственным вектором – угловой скоростью, а значит, момент импульса и кинетическая энергия твёрдого тела однозначно выражаются через его угловую скорость и его геометрические характеристики.

Рассмотрим малый фрагмент твёрдого тела, имеющий массу dm и радиус-вектор $\vec{r} = (X, Y, Z)$ относительно точки O в системе координат $OXYZ$. Пусть в рассматриваемый момент тело вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$.

A1 Запишите в векторном виде выражение для мгновенной скорости $\vec{v}$ фрагмента dm в рассматриваемый момент. Ответ выразите через $\vec{\Omega}$, $\vec{r}$. **0.2**

A2 Запишите в векторном виде выражение для момента импульса $d\vec{L}$ фрагмента dm в рассматриваемый момент. Ответ выразите через $\vec{\Omega}$, $\vec{r}$, dm . **0.2**

A3 Получите выражения для компонент вектора $d\vec{L} = (dL_x, dL_y, dL_z)$ в системе координат $OXYZ$. Ответ выразите через $X, Y, Z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, dm$. **0.3**

A4 Для произвольного движения твёрдого тела можно записать момент импульса в виде **0.5**

$$\begin{aligned}L_x &= I_{xx}\Omega_x + I_{xy}\Omega_y + I_{xz}\Omega_z; \\L_y &= I_{yx}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y + I_{yz}\Omega_z; \\L_z &= I_{zx}\Omega_x + I_{zy}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z.\end{aligned}$$

Получите выражения для коэффициентов $I_{xx}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, I_{yy}, I_{yz}, I_{zx}, I_{zy}, I_{zz}$ в виде интегралов по dm . Интеграл по dm представляет собой сумму по бесконечно малым участкам твёрдого тела массы dm . Например, координаты центра масс можно записать как

$$X_c = \frac{1}{m} \int X dm; \quad Y_c = \frac{1}{m} \int Y dm; \quad Z_c = \frac{1}{m} \int Z dm.$$

В дальнейших пунктах полученные здесь формулы не используются.

Можно показать, что кинетическая энергия твёрдого тела имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\Omega}.$$

Используем следующий математический факт. Оказывается, для любого твёрдого тела поворотом осей можно добиться того, что $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$. В этом случае выражения для $\vec{L}$ и T сильно упрощаются, а I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} называются *главными моментами инерции*. Для краткости обозначим

$$I_{xx} = I_x, \quad I_{yy} = I_y, \quad I_{zz} = I_z.$$

Однако в этом случае возникает другая сложность: оси оказываются связаны с самим телом, и поэтому являются подвижными. Направим ось Oz вдоль оси симметрии волчка. Выберем оси Ox, Oy так, чтобы они вместе с осью Oz образовывали правую тройку. Из соображений симметрии очевидно, что в этом случае оси Oxz являются главными для волчка.

Road to IPhO

Пусть $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – единичные векторы осей $Oxyz$. Пусть в некоторый момент волчок вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$, причём в системе координат $Oxyz$, связанной с волчком, $\vec{\omega} = \omega_x \vec{e}_x + \omega_y \vec{e}_y + \omega_z \vec{e}_z$.

A5 Получите выражения для $\vec{L}$ и T в главных осях. Ответ выразите через $I_x, I_y, I_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

0.5

Для изучения вращений используется основное уравнение вращательного движения:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M},$$

где $\vec{L}$ – момент импульса системы относительно выбранной неподвижной точки, $\vec{M}$ – суммарный момент внешних сил относительно этой точки.

Поскольку оси системы координат $Oxyz$ вращаются с угловой скоростью $\vec{\omega}$, производные единичных векторов подвижной системы координат имеют вид

$$\dot{\vec{e}}_x = \vec{\omega} \times \vec{e}_x, \quad \dot{\vec{e}}_y = \vec{\omega} \times \vec{e}_y, \quad \dot{\vec{e}}_z = \vec{\omega} \times \vec{e}_z.$$

A6 Получите выражения для компонент вектора $\dot{\vec{L}}$ в подвижной системы координат $\left(\dot{\vec{L}}\right)_x, \left(\dot{\vec{L}}\right)_y, \left(\dot{\vec{L}}\right)_z$. Ответ выразите через $I_x, I_y, I_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$.

0.5

Из пункта A6 следует, что основное уравнение динамики в подвижных осях $Oxyz$ имеет вид

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = M_x \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = M_y \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_z \end{cases}$$

Здесь M_x, M_y, M_z – компоненты внешнего момента $\vec{M}$ в системе координат $Oxyz$. Эти уравнения называются *динамическими уравнениями Эйлера* и являются очень удобным инструментом изучения вращения твёрдого тела.

Часть В. Уравнения динамики симметричного волчка (2.1 балла)

В дальнейшем нас будет интересовать движение центра масс волчка. Положение волчка в пространстве можно задать двумя углами, аналогичными углам в сферической системе координат. Угол между осью OZ и осью симметрии волчка Oz обозначим θ , угол поворота оси симметрии волчка вокруг OZ – φ . Кроме этого, волчок может поворачиваться вокруг собственной оси симметрии, что не влияет на положение его центра масс. Таким образом, общее движение волчка представляет собой суперпозицию трех вращений:

1. Вращение относительно оси симметрии с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}_s$.
2. Вращение, при котором изменяется угол θ , соответствующая угловая скорость $\vec{\omega}_\theta$ перпендикулярна осям OZ и Oz .
3. Вращение, при котором изменяется угол φ , соответствующая угловая скорость $\vec{\omega}_\varphi$ направлена вдоль OZ .

Тогда полная угловая скорость волчка – сумма этих трех угловых скоростей

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_s + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\varphi.$$

Заметим, что в силу симметрии волчка мы можем выбрать оси Ox и Oy в плоскости, перпендикулярной оси симметрии волчка произвольным образом. Воспользуемся этим и направим ось Ox в заданный момент времени в плоскости OZz , так, чтобы угол xOZ был острым.

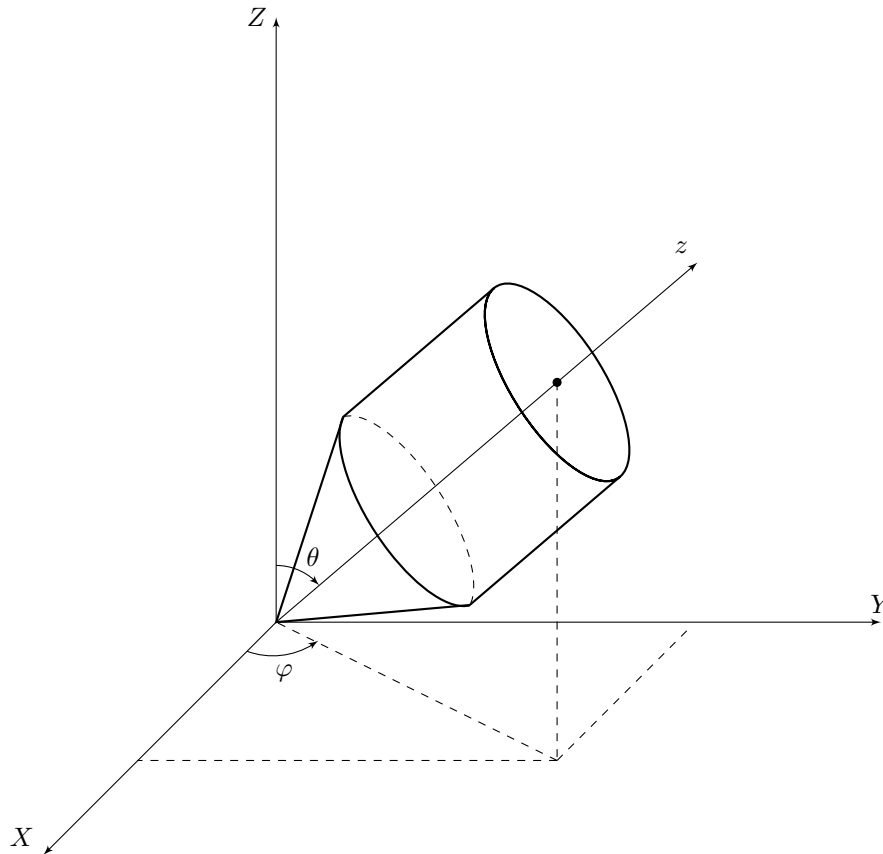
B1 Найдите проекции угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Выразите ответ через $\omega_s, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \theta$.

0.4

Рассмотрим уравнения динамики волчка в случае, когда он движется под действием силы тяжести. Пусть ускорение свободного падения равно g и направлено против оси OZ .

В силу симметрии для рассматриваемого волчка $I_x = I_y$. Обозначим $I_x = I_y = A, I_z = C$ и везде далее будем использовать эти обозначения.

Road to IPhO



- B2** Покажите, что проекция L_1 момента импульса $\vec{L}$ на **неподвижную вертикальную** ось OZ постоянна. Покажите, что проекция L_2 момента импульса $\vec{L}$ на **подвижную** ось Oz постоянна. **0.4**

Если у вас не получилось доказать постоянство L_1, L_2 , дальше вы можете использовать этот факт без доказательства.

- B3** Используя результаты пункта **A5**, выразите значения проекций L_1 и L_2 через $\omega_s, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \theta, A, C$. **0.6**

- B4** В этом пункте будем считать, что $l = 0$, и момент силы тяжести можно не учитывать. Пусть момент импульса волчка равен L_0 и направлен вдоль оси OZ . В момент времени $t = 0$ значения углов $\theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0$. Найдите зависимость углов θ, φ от времени. Такое движение называется регулярной прецессией. **0.7**

Часть С. Эффективный потенциал волчка Лагранжа (1.5 балла)

В этой части будем исследовать движение волчка с учетом момента силы тяжести.

- C1** Для произвольного положения волчка выразите полную энергию E движения волчка (сумму кинетической и потенциальной) через $\omega_s, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, A, C, m, g, l, \theta$. **0.6**

- C2** Выразите ω_s и $\dot{\varphi}$ через L_1, L_2, A, C, θ , используя результаты пункта **B3**. **0.3**

- C3** Используя постоянство L_1, L_2 , приведите выражение для полной энергии E к виду **0.6**

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{\theta}^2 + U(\theta).$$

Получите выражения для $\mu, U(\theta)$ через A, C, L_1, L_2, m, g, l .

Примечание. Как известно, полная энергия определена с точностью до константы, которую для удобства можно положить равной нулю.

Road to IPhO

Из вышесказанного следует, что исследование зависимости θ от времени сводится к исследованию одномерной задачи с энергией E , причём $\frac{\mu}{2}\dot{\theta}^2$ можно рассматривать как кинетическую энергию, а $U(\theta)$ как потенциальную. Поэтому в данном случае $U(\theta)$ называется *эффективным потенциалом*.

Часть D. Различные движения волчка Лагранжа (6.2 баллов)

В этой части мы рассмотрим несколько основных возможных режимов движения волчка Лагранжа.

Физический маятник

Пусть в начальный момент $\theta = \theta_0 > 0$, а волчок неподвижен. Волчок отпускают без начальной скорости.

- D1** Найдите период колебаний волчка. Ответ получите в виде определённого интеграла, содержащего A, C, l, θ_0, g . Получите также упрощённое выражение для случая $\pi - \theta_0 \ll 1$. **0.8**

«Спящий» волчок

Ещё одним очевидным движением волчка является ситуация, когда $\theta = 0$ в процессе всего движения. Такой волчок называют «спящим» из-за отсутствия движения его центра масс.

Пусть «спящий» волчок вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси.

- D2** Выразите L_1 и L_2 через A, C, ω_0 . **0.2**

Пусть теперь «спящий» волчок слегка отклоняют от вертикального положения, при этом параметры вращения подбираются так, что L_1 и L_2 остаются равными найденным в предыдущем пункте.

- D3** Найдите условие, связывающее A, C, m, g, l, ω_0 , при котором положение $\theta = 0$ является устойчивым для отклонений, описанных выше. Это условие называется условием Маиевского. Оказывается, что при выполнении найденного условия положение равновесия является устойчивым даже при отказе от условия сохранения L_1 и L_2 . **0.5**

Регулярная прецессия

Можно показать, что для потенциала $U(\theta)$ при любых L_1, L_2 существует единственный угол θ_1 , являющийся положением равновесия для эквивалентной одномерной системы.

- D4** Получите уравнение на θ , которому удовлетворяет угол θ_1 . Уравнение может содержать A, C, L_1, L_2, m, g, l . **0.7**
Подсказка. $U(\theta)$ можно представить в виде функции от новой переменной $s = \cos \theta$, что значительно упрощает решение.

Из пункта C2 следует, что при $\theta = \theta_1 = \text{const}$ движение является регулярной прецессией: $\dot{\varphi} = \omega_p = \text{const}$ – угловая скорость прецессии, $\omega_s = \text{const}$ – угловая скорость собственного вращения.

- D5** Найдите возможные скорости прецессии волчка ω_p при $\theta = \theta_1$. Ответ выразите через A, C, m, g, l, ω_s . **0.8**
 θ_1 . Одним из способов решения может быть подстановка в уравнение из D4 выражений для L_1, L_2 через угловые скорости ω_s, ω_p .

- D6** Получите приближенные выражения для частот в случае $mgl \ll C\omega_s^2$. Считайте, что A и C – величины одного порядка. **0.3**

Нутация и нерегулярная прецессия

В общем случае угол θ не остаётся постоянным. Можно показать, что для потенциала $U(\theta)$ при любых L_1, L_2 в течении движения θ периодически меняется от некоторого $\theta_{\min}$ до некоторого $\theta_{\max}$. Такое изменение угла θ называется *нутацией*. При этом угол φ меняется может меняться неравномерно, поэтому прецессия называется нерегулярной.

Рассмотрим следующую ситуацию: в начальный момент времени ось волчка горизонтальна ($\theta = \pi/2$), центр масс волчка неподвижен, волчок закручен вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω_0 . Волчок освобождается без толчка.

- D7** Определите угол $\alpha_{\max}$ максимального отклонения оси волчка от горизонтали в процессе последующего движения. Ответ выразите через A, C, m, g, l, ω_0 . **0.7**

Road to IPhO

Пусть теперь волчок быстро закручен, т.е. $C\omega_0^2 \gg mgl$. Считайте, что A и C – величины одного порядка.

D8 Найдите зависимость угла отклонения оси волчка от горизонтали от времени $\alpha(t)$. Ответ выразите через A, C, m, g, l, ω_0 . **0.7**

D9 Найдите зависимость угла прецессии от времени $\varphi(t)$. В начальный момент $\varphi(0) = \varphi_0$. Ответ выразите через $A, C, m, g, l, \omega_0, \varphi_0$. **0.5**

D10 Изобразите характерный график зависимости $\alpha(\varphi)$. Определите угол $\Delta\varphi$, на который поворачивается ось волчка между двумя последовательными возвращениями оси волчка в горизонтальное положение. Ответ выразите через A, C, m, g, l, ω_0 . **0.5**

Пусть волчок представляет собой тонкий стержень массы m , длины R , к концу которого прикреплён тонкий однородный диск массы $2m$ и радиуса R . Точка крепления совпадает с центром диска, стержень перпендикулярен плоскости диска. Как и ранее, волчок отпускают из горизонтального положения без толчка, закрутив вокруг оси до угловой скорости $\omega_0 = \sqrt{100\frac{g}{R}}$.

D11 Рассчитайте для описанной системы $\Delta\varphi$. **0.5**