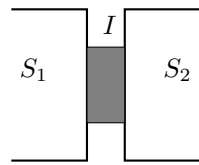


Road to IPhO

Эффект Джозефсона

Сверхпроводник представляет собой вещество, ток по которому может течь при нулевом напряжении без потерь энергии. Оказывается, что если два сверхпроводника разделены тонким слоем несверхпроводящего вещества (например из нормального металла с конечным сопротивлением или из изолятора), то через такой слой все еще может течь ток без сопротивления, при условии что он не превышает некоторого критического значения. Такая система, состоящая из двух сверхпроводников, разделенных несверхпроводящей прослойкой, называется джозефсоновским контактом, а эффект протекания через такой контакт тока без потерь энергии – эффектом Джозефсона. Этот эффект был теоретически предсказан Джозефсоном в 1962 году и вскоре обнаружен экспериментально. У эффекта Джозефсона есть несколько важных практических приложений, в частности датчик для измерения магнитного поля и стандарт напряжения.



S_1, S_2 – сверхпроводники,
 I – изолятор

Состояние сверхпроводника задается комплексным числом $\Delta = |\Delta|e^{i\theta}$, квадрат модуля этого числа задает концентрацию электронов в сверхпроводящем состоянии. Величина сверхпроводящего тока через контакт определяется разностью фаз $\varphi = \theta_2 - \theta_1$ для этих двух сверхпроводников. В простейшем случае, который и будет исследоваться в этой задаче, зависимость имеет вид

$$I_s = I_c \sin \varphi.$$

Здесь постоянная I_c – критический ток, зависящий от материала и размеров контакта.

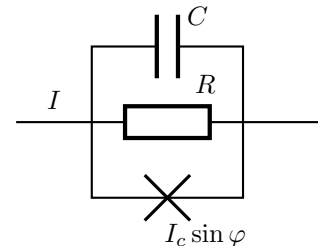
Если пропустить через контакт ток больше I_c , на нем возникнет напряжение V , а полный ток будет равен сумме нормального тока $I_n = V/R$ и сверхпроводящего тока. При этом разность фаз будет меняться с течением времени, ее изменение описывается уравнением

$$2eV = \hbar \dot{\varphi}.$$

Здесь e – заряд электрона, $\hbar$ – постоянная Планка. Далее для записи уравнений удобно использовать комбинацию $\Phi_0 = \pi \hbar / e$ с размерностью магнитного потока,

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi} \dot{\varphi}.$$

Кроме того, на краях контакта могут накапливаться заряды, которые можно учесть с помощью параллельно присоединенного к контакту конденсатора. Таким образом, в нашей модели эквивалентная схема контакта имеет вид параллельно соединенных идеального контакта (через который течет ток без сопротивления), резистора R и конденсатора C , напряжения на которых задаются формулой выше.



Часть А. Контакт без емкости (5.3 балла)

В этой части будем рассматривать поведение джозефсоновского контакта без учета емкости, то конденсатор в эквивалентной схеме можно заменить на разрыв цепи.

A1 Пусть на контакт подали постоянное напряжение V . Начальное значение тока равно нулю. Определите зависимость тока от времени $I(t)$. Выразите ответ через Φ_0 , V , I_c , R . **0.5**

A2 Пусть через контакт пропускается постоянный ток $I > I_c$. Запишите дифференциальное уравнение для $\varphi(t)$. **0.5**

A3 Продифференцируйте уравнение по времени. Исключите из уравнения фазы и получите выражение для $\dot{V}(t)^2$ через V , I и параметры системы. **0.7**

A4 В предыдущем уравнении перейдите к переменной $u = 1/V$, выразите $\dot{u}^2$ через u , I и параметры системы. **0.3**

A5 У вас должно получиться уравнение, аналогичное закону сохранения энергий для колебаний гармонического осциллятора. Определите частоту колебаний ω , значение u_0 , относительно которого происходят колебания, и амплитуду колебаний A . **0.8**

Road to IPhO

- A6** Запишите зависимость $V(t)$. Считайте, что при $t = 0$ значение $V(t)$ имеет минимум. **0.2**
- A7** Постройте качественные графики зависимости $V(t)$ для случаев $I = 1.1I_c$ и $I = 3I_c$, укажите координаты характерных точек. **0.6**
- A8** Найдите среднее (по времени) значение напряжения на контакте. Выразите ответ через R, I, I_c . **0.8**
- Пусть изначально ток через контакт не течет. Подключим к нему источник и будем медленно увеличивать значение протекающего через контакт тока от нуля до некоторого значения $I < I_c$. Изменение фазы при таком процессе также будет медленным, поэтому нормальной составляющей тока через контакт можно пренебречь. Значит потерь энергии тоже не будет, а вся работа источника пойдет на увеличение энергии джозефсоновского контакта.
- A9** Определите зависимость энергии $E(\varphi)$ джозефсоновского контакта в зависимости от разности фаз φ на нем. В ответ также могут входить Φ_0 и I_c . Считайте, что $E(0) = 0$. **0.7**
- A10** Для типичного джозефсоновского контакта значение критического тока $I_c = 0.5$ мА, сопротивление $R = 0.7$ Ом. Фундаментальные постоянные $e = 1.602 \times 10^{-19}$ Кл, $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ Дж · с. Найдите численное значение энергии джозефсоновского контакта $E(\pi)$ и частоту колебаний напряжения при постоянном токе через контакт $I = 2I_c$. **0.2**

Часть В. Контакт с емкостью (1.5 балла)

В этой части будем рассматривать поведение контакта с учетом его емкости.

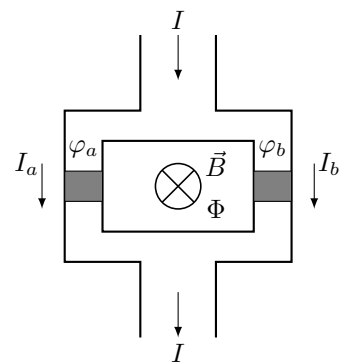
- B1** Пусть в контакт втекает постоянный ток I (см. рис. во введении к задаче). Запишите дифференциальное уравнение, описывающее изменение разности фаз φ . В ответ также могут входить Φ_0, R, C, I_c . **0.3**
- B2** Пусть внешний ток равен нулю, а разность фаз $\varphi \ll 1$. В этом случае φ (а значит и другие величины, характеризующие контакт) будет совершать затухающие колебания. Определите частоту колебаний ω_p . **0.6**
- B3** Определите добротность колебательной системы из предыдущего пункта Q . При каких значениях емкости в системе возможны колебания, а не затухающее движение? **0.6**

Часть С. Сверхпроводящий квантовый интерферометр (1.2 балла)

Рассмотрим пару Джозефсоновских контактов, расположенных как в схеме на рисунке. Эти контакты образованы двумя сверхпроводниками, разделенными двумя слоями изоляторов так что образуется кольцо. В центре кольца расположена катушка, создающая магнитный поток Φ . Из-за магнитного поля фаза внутри проводника начинает зависеть от координат, поэтому разности фаз на двух контактах a и b отличаются друг от друга. Если φ_a и φ_b – разности фаз на этих контактах, они связаны с потоком магнитного поля Φ соотношением

$$\varphi_a - \varphi_b = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}.$$

Такое устройство называется сверхпроводящим квантовым интерферометром (SQUID, superconducting quantum interference device).



- C1** Пусть критические токи через контакты равны I_{ac} и I_{bc} соответственно. Тогда максимальный сверхпроводящий ток I , который может течь через такой контакт, будет зависеть от магнитного потока через интерферометр. Определите это максимальное значение I_0 , а также косинусы разностей фаз φ_a, φ_b , при которых этот максимум достигается. Выразите ответ через $I_{ac}, I_{bc}, \Phi, \Phi_0$. Ваши ответы не должны содержать обратных тригонометрических функций. **1.2**

Если ток через интерферометр превысит максимальное значение, найденное в предыдущем пункте, на интерферометре возникнет напряжение, аналогично случаю одного контакта. Исследуя поведение этого напряжения, можно измерять магнитные поля с крайне высокой точностью.