

Road to IPhO

Всплывающие пузыри

При наблюдении за воздушными пузырьками, всплывающими в жидкости, можно заметить, что их форма очень сильно зависит от объёма воздуха внутри пузырьков и может быть как близкой к сферической, так и напоминать тонкий диск. Данная задача посвящена изучению форм воздушных пузырьков, всплывающих в жидкости. При решении задачи примем следующую модель явления:

- если не указано обратного, все движущиеся тела имеют форму, слабо отличающуюся от сферической;
- сжимаемостью и вязкостью жидкости можно пренебречь;
- гравитационным полем в частях **A** и **B** можно пренебречь.

Часть А. Хорошо забытое старое(5.0 балла)

Рассмотрим шар радиусом R , движущийся со скоростью $\vec{v}_0$ в бесконечном объёме несжимаемой жидкости плотностью ρ с нулевой вязкостью. Шар приводит жидкость в движение. Напомним, что гравитационным полем можно пренебречь. Движение жидкости характеризуется величиной μ , называемой присоединённой массой. С присоединённой массой связаны следующие характеристики движущейся жидкости:

1. Если шар движется в жидкости со скоростью $\vec{v}_0$, то кинетическая энергия E_k жидкости, окружающей шар, определяется выражением:

$$E_k = \frac{\mu v_0^2}{2}.$$

2. Если шар движется в жидкости со скоростью $\vec{v}_0$, то импульс $\vec{p}$ жидкости, окружающей шар, определяется выражением

$$\vec{p} = \mu \vec{v}_0.$$

Пусть $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра шара в произвольную точку пространства, а $\vec{v}(\vec{r})$ — скорость соответствующего кусочка жидкости в лабораторной системе отсчёта. При решении задачи вам понадобится теорема Томсона, утверждающая, что если изначально неподвижную несжимаемую жидкость с нулевой вязкостью привести в движение, то циркуляция вектора скорости жидкости по любому замкнутому контуру, не пересекающему поверхности движущихся в жидкости тел, обращается в ноль, что можно записать следующим образом:

$$\oint_l \vec{v} d\vec{l} = 0.$$

В пунктах **A1** - **A9** будем решать задачу в в системе отсчёта, связанной с шаром. Скорость жидкости в этой системе отсчёта будем обозначать как $\vec{v}_{\text{отн}}$.

- A1** Чему равен поток вектора относительной скорости жидкости через произвольную замкнутую поверхность, не пересекающую поверхность шара? Ответ обоснуйте. **0.3**

Примечание: потоком вектора относительной скорости жидкости через замкнутую поверхность называется величина Φ , определяемая выражением:

$$\Phi = \oint_S \vec{v}_{\text{отн}}(\vec{r}) d\vec{S}.$$

- A2** Чему равна нормальная компонента скорости жидкости $v_{\text{отн},n}$ в системе отсчёта, связанной с шаром? **0.1**

- A3** Чему равна относительная скорость жидкости $\vec{v}_{\infty}$ на бесконечном удалении от шара? **0.1**

- A4** Рассмотрим сверхпроводящее тело, помещенное в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$. Напишите выражение для циркуляции магнитного поля $\vec{B}(\vec{r})$ по контуру, не пересекающему поверхность сверхпроводника, и выражение для потока магнитного поля через замкнутую поверхность, не пересекающую поверхность сверхпроводника. Также укажите граничные условия магнитного поля на границе тела и на бесконечном удалении от него. **0.4**

Road to IPhO

A5 Поместим сверхпроводящий шар радиусом R в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$. Найдите индукцию магнитного поля $\vec{B}(\vec{r})$ во всем пространстве вне шара. Ответ выразите через $\vec{B}_0$, $\vec{r}$ и R . **0.8**

A6 Пользуясь результатами предыдущих пунктов, найдите зависимость $\vec{v}_{\text{отн}}(\vec{r})$. **0.2**

Поскольку шар движется в жидкости с постоянной скоростью, в системе отсчёта шара движение жидкости является стационарным. Это позволяет получить распределение давления на поверхности шара.

A7 Рассмотрим стационарное движение несжимаемой жидкости с нулевой вязкостью по тонкой трубке. Пусть p — давление в жидкости, φ — потенциальная энергия единицы массы жидкости, а v — скорость течения в трубке. Используя законы сохранения энергии и массы, покажите, что для всех точек трубки выполняется соотношение (уравнение Бернулли): **0.4**

$$\varphi + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const}$$

Пусть θ — угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и скоростью $\vec{v}$.

A8 Считая, что давление на бесконечном удалении от шара равно p_0 , найдите зависимость $p(\theta)$ на поверхности шара. Выразите ответ через p_0 , ρ , v_0 , θ . **0.6**

A9 Вычислите равнодействующую сил давления, действующих на поверхность шара. Выразите ответ через $\vec{v}_0$, R , ρ . **0.4**

Вернёмся в лабораторную систему отсчёта. В лабораторной системе отсчёта скорость жидкости в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ равна $\vec{v}(\vec{r})$

A10 Найдите распределение скорости жидкости $\vec{v}(\vec{r})$ в лабораторной системе отсчёта. **0.1**

A11 Чему равна кинетическая энергия жидкости E_k в лабораторной системе отсчёта? Выразите ответ через ρ , R , v_0 . **0.8**

A12 Найдите присоединённую массу μ . Выразите ответ через ρ , R . **0.2**

Если вы не смогли решить предыдущий пункт, в дальнейшем можете считать $\mu = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$.

A13 Рассмотрим шар, движущийся со скоростью $\vec{v}_0$ и ускорением $\vec{a}_0$. Используя выражение для импульса $\vec{p}$ жидкости, получите выражение для силы $\vec{F}$, действующей на шар со стороны жидкости. Ответ выразите через ρ , R и $\vec{a}_0$. **0.3**

Поскольку пузырь не является твёрдым телом, в результате движения он будет деформироваться. В дальнейшем считайте его деформацию малой.

Рассмотрим движение пузыря с коэффициентом поверхностного натяжения σ со скоростью v_0 . Считайте применимыми все выражения, полученные в предыдущих пунктах. Давление внутри пузыря всюду одинаково и равно p_{in} .

A14 Получите зависимость кривизны K поверхности пузыря от угла θ . Используйте p_{in} , p_0 , ρ , θ и v_0 . **0.3**
Примечание: кривизной K поверхности называется сумма обратных главных радиусов кривизны:

$$K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Она связана с Лапласовым давлением как:

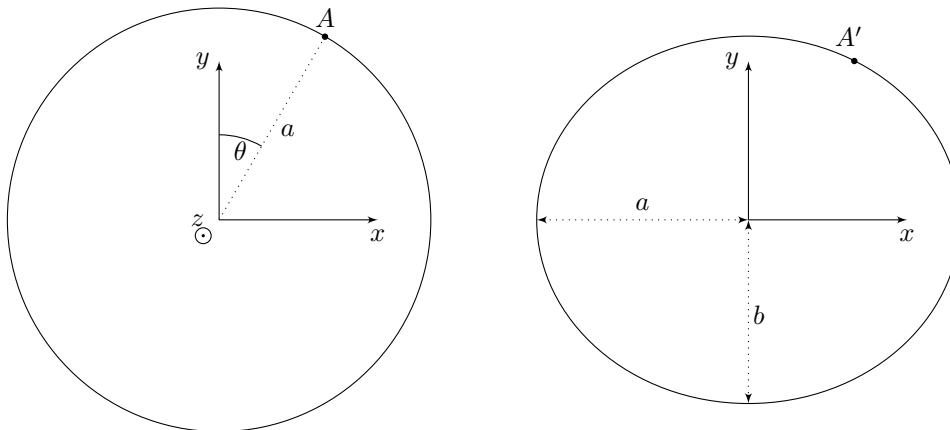
$$\Delta p = \sigma K$$

Road to IPhO

Часть В. Влияние скорости на деформацию пузыря(2.5 балла)

Рассмотрим эллипсоид, получаемый из эллипса с большой полуосью a и малой полуосью b вращением относительно малой оси. Ось вращения обозначим за y .

Эту фигуру можно получить сжатием сферы радиусом a вдоль оси y с коэффициентом k , где $k = b/a$. Найдём кривизну поверхности полученной фигуры в произвольной точке A' , которой до сжатия соответствовала точка A и угол θ , отсчитываемый от оси y .



Можно показать, что в плоскости (x, y) радиус кривизны эллипсоида равен:

$$R_1(\theta) = \frac{a}{k} \cdot (\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}},$$

а в плоскости, содержащей нормаль к эллипсоиду в точке A' и перпендикулярной плоскости (x, y) , радиус кривизны эллипсоида равен:

$$R_2(\theta) = \frac{a}{k} \sqrt{\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta}.$$

Так как $K(\theta)$ в части А было выведено в предположении, что капля является сферой, то отклонения от сферы должны быть маленькими. Это означает, что $k = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$. Также считайте, что $a \approx R$, где R — радиус пузыря, который мы использовали в части А.

В1 С учётом малости ε величины R_1 и R_2 можно представить в виде:

0.6

$$R_1(\theta) \approx R(1 + A_1\varepsilon - B_1\varepsilon \sin^2 \theta) \quad R_2 \approx R(1 + A_2\varepsilon - B_2\varepsilon \sin^2 \theta).$$

Найдите B_1 и B_2 . Далее слагаемыми $A_1\varepsilon$ и $A_2\varepsilon$ можно пренебречь.

Если вы не смогли решить данный пункт, то далее можно считать, что $B_1 = B_2 = 1$. К потере последующих баллов это не приводит.

В2 Найдите зависимость кривизны эллипсоида $K(\theta)$ в первом порядке по ε . Выразите ответ через R, θ .

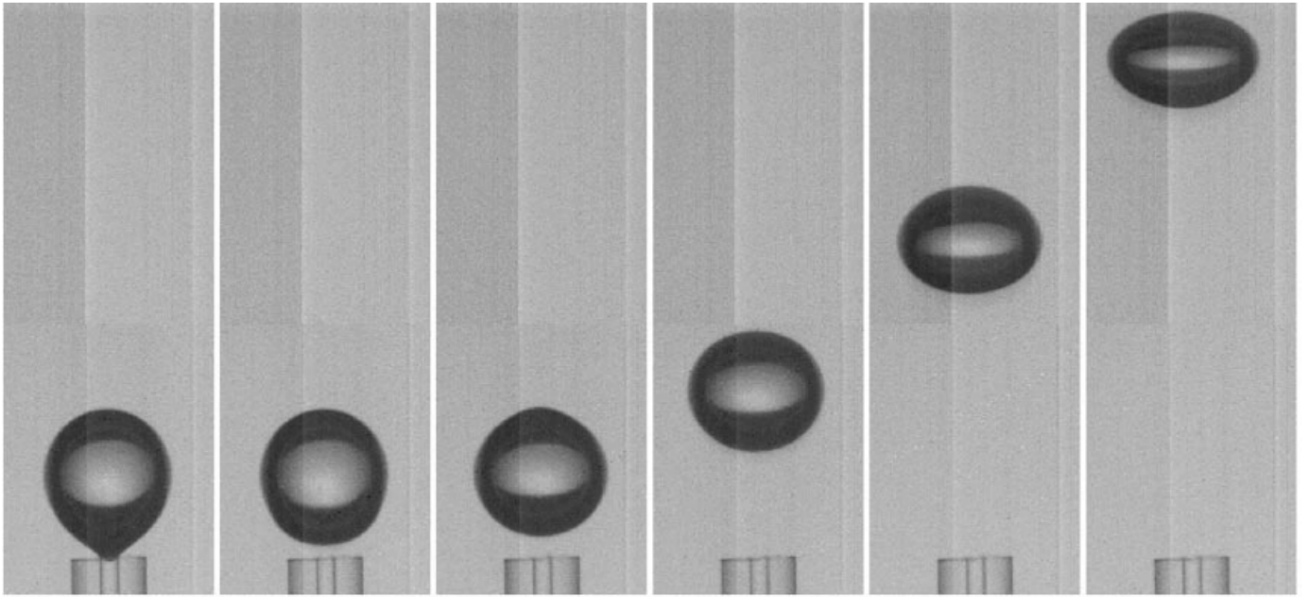
0.2

В3 Чему равна величина ε для пузыря, рассмотренного в пункте А15? Ответ выразите через скорость пузыря v_0 , радиус пузыря R , коэффициент поверхностного натяжения σ и плотность жидкости ρ . **0.6**

В4 Чему равен эксцентриситет e пузыря, рассмотренного в пункте А15? Ответ выразите через скорость пузыря v_0 , радиус пузыря R , коэффициент поверхностного натяжения σ и плотность жидкости ρ . **0.3**

В5 Сферический пузырь с начальным диаметром $d = 2$ мм поднимается в воде плотностью $\rho = 10^3$ кг/с и поверхностным натяжением $\sigma = 72 \cdot 10^{-3}$ Н/м. Проведя необходимые измерения, вычислите скорость пузыря на последних трёх фотографиях. Также вычислите ускорение пузыря a . **0.8**

Road to IPhO



Часть С. Динамика движения пузыря(1.5 балла)

В реальной жизни ускорение свободного падения g создаст в сосуде вертикальный градиент давления, в следствие которого появится сила Архимеда F_A , разгоняющая пузырь вверх. Изначально пузырь является сферическим, но в процессе разгона, согласно теории из предыдущего пункта, он начинает сплющиваться.

Второй закон Ньютона для почти сферического пузыря будет выглядеть следующим образом:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_\mu + \vec{F}_{\text{тр}},$$

где m - масса пузыря, которой можно пренебречь, $\vec{F}_A$ - сила Архимеда, $\vec{F}_\mu$ - сила, действующая со стороны воды на пузырь, связанная с присоединённой массой воды, $\vec{F}_{\text{тр}}$ - сила трения, возникающая из-за эффектов турбулентности. В нашей модели $\vec{F}_{\text{тр}}$ хорошо описывается формулой $\vec{F}_{\text{тр}} = -\pi R^2 \rho v \vec{v}$, где $\vec{v}$ - скорость пузыря.

Скорость пузыря изначально равна нулю.

C1 Чему равно его ускорение a в начальный момент времени? Ответ выразите через g .

0.6

C2 Найдите установившуюся скорость пузыря v_{max} . Чему равно ε при установившейся скорости? Ответы выразите через R , g , ρ и σ .

0.3

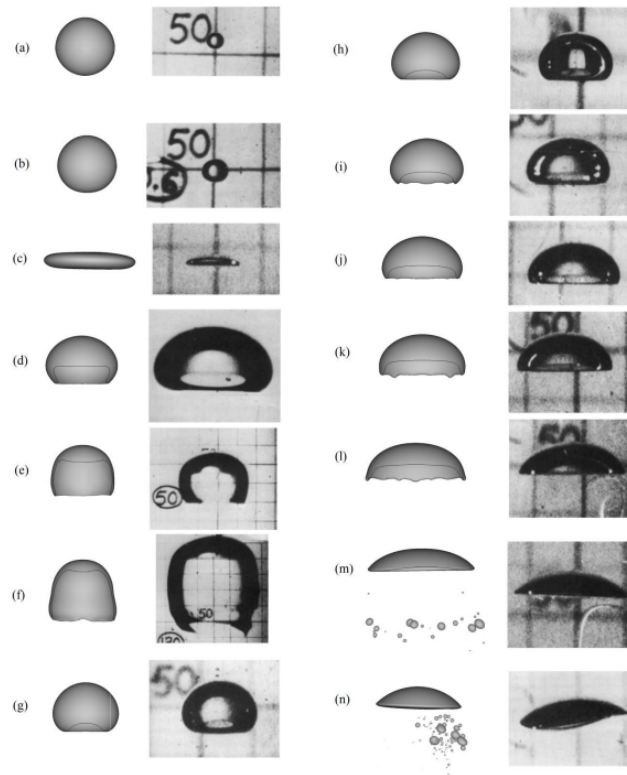
C3 Рассчитайте численные значения v_{max} и ε для $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\sigma = 72 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$ и $R = 1 \text{ мм}$. Применима ли выбранная модель для указанного радиуса?

0.6

Road to IPhO

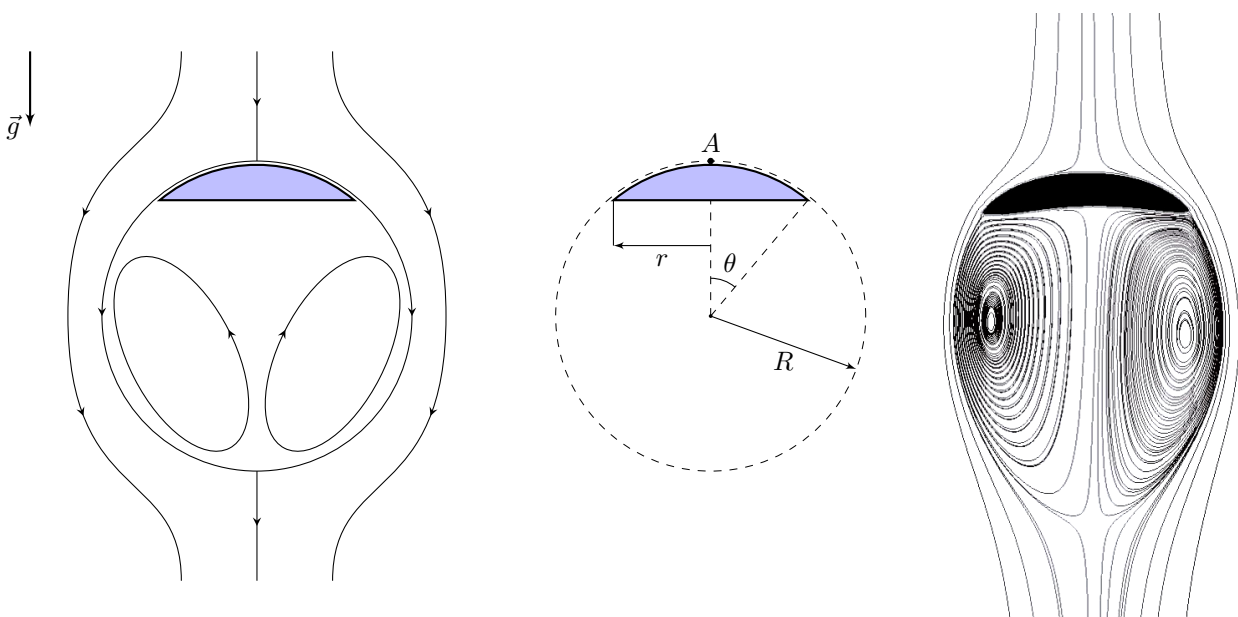
Часть D. Крутой медузоподобный пузырь(2.0 балла)

В больших по объёму пузырях сила поверхностного натяжения слабее, чем в маленьких, поэтому их форма при достижении постоянной скорости далека от сферической.



В общем случае форма пузырей, приведенных на рисунке выше, моделируется при помощи компьютера. Однако в предыдущих частях мы смогли изучить форму, близкую к сферической: это пузыри *a* и *b*. В этой части мы изучим модель, применимую к пузырям *m* и *n*.

Опишем пузырь как сегмент сферы с радиусом основания r . Радиус кривизны пузыря, то есть радиус сферы, постоянен и равен R . На photographиях *m* и *n* видно, что пузыри почти плоские, а значит можно считать, что $r \ll R$. Точку на поверхности пузыря будем характеризовать малым углом θ , отсчитываемым от центра кривизны. Давление воздуха внутри пузыря равно p_{in} .



Road to IPhO

D1 Докажите, что давление воды в точках на поверхности пузыря постоянно.

0.2

Линии тока воды схематично обозначены на рисунке. Будем считать, что распределение скоростей жидкости $\vec{v}_{\text{отн}}(\vec{r})$ над пузырьком точно такое же, как и в случае движения твёрдого шара радиусом R со скоростью v_0 . Ускорение свободного падения g .

Пусть пузырь всплывает в глубоком водоёме. Давление на поверхности водоёма равно атмосферному p_0 . Расстояние от поверхности водоёма до точки A равно $h \gg R$.

D2 Найдите зависимость давления над поверхностью пузыря $p(\theta)$, используя ρ , v_0 , g , R , θ и h .

1.0

D3 Получите выражение для установившейся скорости пузыря v_0 . Рассчитайте значение для $R = 30$ см и $g = 10$ м/с². **0.8**