

A1^{0.20} Сначала получим точные уравнения, которые описывают динамику космического корабля. Выразите производные по времени от высоты h и дальности s через v, γ, r_0, r .

Скорость уменьшения высоты – вертикальная проекция скорости $v \sin \gamma$, скорость горизонтального перемещения $v \cos \gamma$ после проецирования на поверхность Земли уменьшается в r/r_0 раз.

Ответ:

$$\dot{h} = -v \sin \gamma, \quad \dot{s} = v \cos \gamma \cdot r_0/r$$

A2^{1.00} Найдите производные модуля скорости v и угла γ . Также в ответ могут входить подъемная сила L , сила сопротивления воздуха D , ускорение свободного падения на данной высоте g , масса космического корабля m, v, γ, r .

Второй закон Ньютона в проекции на оси вдоль и перпендикулярно скорости:

$$ma_\tau = -D + mg \sin \gamma, \quad ma_n = -L + mg \cos \gamma.$$

Касательное ускорение $a_\tau = \dot{v}$, поэтому

$$a_\tau = -\frac{D}{m} + g \sin \gamma.$$

Нормальное ускорение $a_n = \omega v$, где ω – угловая скорость поворота вектора скорости, которую считаем положительной, если угловая скорость поворачивается вниз. Эта скорость не равна производной угла γ , поскольку направление горизонтали меняется от точки к точке с угловой скоростью $\omega_h = v \cos \gamma / r$, тогда

$$\omega = \dot{\gamma} + \frac{v \cos \gamma}{r},$$

поэтому уравнение для нормального ускорения

$$mv \left(\dot{\gamma} + \frac{v \cos \gamma}{r} \right) = -L + mg \cos \gamma,$$

откуда находим требуемую производную

Ответ:

$$\dot{v} = -\frac{D}{m} + g \sin \gamma, \quad \dot{\gamma} = -\frac{L}{mv} + \frac{g}{v} \cos \gamma - \frac{v \cos \gamma}{r}$$

B1^{0.40} Получите выражение для производной dv/dh . Представьте ответ в виде

$$\frac{dv}{dh} = Af(v, h),$$

где A – постоянная, которая может зависеть от всех постоянных, характеризующих космический корабль и атмосферу ($m, S, C_D, C_L, \rho_0, \beta, \gamma$), а f – некоторая функция высоты и скорости. **В дальнейшем используйте постоянную A для записи ответов.**

Подставим выражение для силы сопротивления воздуха D в уравнение движения и получим, пренебрегая гравитационным ускорением

$$\dot{v} = -\frac{\rho_0 S C_D}{2m} v^2 e^{-\beta h}.$$

С учетом формулы для $\dot{h} = -v \sin \gamma$ получим

$$\frac{dv}{dh} = \frac{\dot{v}}{\dot{h}} = \frac{\rho_0 C_D S}{2m \sin \gamma} \cdot v e^{-\beta h}$$

Ответ:

$$\frac{dv}{dh} = A v e^{-\beta h}, \quad A = \frac{\rho_0 C_D S}{2m \sin \gamma}$$

B2^{0.80} Найдите зависимость скорости космического корабля от высоты. На начальной высоте h_0 скорость была равна v_0 . Выразите ответ через A, β, h, v_0, h_0 . Также получите приближенный ответ, считая, что на высоте h_0 плотность атмосферы пренебрежимо мала (в этом случае в ответ не должна входить h_0). **Далее везде используйте приближенное выражение.**

Разделим переменные, получим

$$\frac{dv}{v} = A e^{-\beta h} dh,$$

проинтегрировав, получим

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_{h_0}^h A e^{-\beta h} dh, \quad \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{A}{\beta} (e^{-\beta h} - e^{-\beta h_0}).$$

Отсюда найдем выражение для скорости

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{A}{\beta}(e^{-\beta h} - e^{-\beta h_0})\right)$$

При достаточно большом значении h_0 слагаемым $e^{-\beta h_0} \ll e^{-\beta h}$ можно пренебречь

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{A}{\beta}e^{-\beta h}\right)$$

Ответ:

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{A}{\beta}(e^{-\beta h} - e^{-\beta h_0})\right), \quad v \approx v_0 \exp\left(-\frac{A}{\beta}e^{-\beta h}\right)$$

В3 ^{0.30}

Найдите зависимость ускорения a (то есть производной модуля скорости) космического корабля от высоты. Выразите ответ через v_0, A, β, h, γ .

Подставим в уравнение для касательного ускорения формулу для скорости, получим

$$a = \dot{v} = -\frac{D}{m} = -\frac{\rho_0 S C_D}{2m} v^2 e^{-\beta h} = -A v_0^2 \sin \gamma \exp\left(-\frac{2A}{\beta}e^{-\beta h} - \beta h\right)$$

Ответ:

$$a = -A v_0^2 \sin \gamma \exp\left(-\frac{2A}{\beta}e^{-\beta h} - \beta h\right)$$

В4 ^{0.50}

Найдите высоту h_c , на которой модуль ускорения максимален. Получите формулу для максимального значения модуля ускорения $a_{\max}$ и скорости v_c на высоте h_c . Выразите ответы через A, β, γ, v_0 .

Модуль ускорения максимален, при минимальном показателе экспоненты,

$$\frac{d}{dh} \left(-\frac{2A}{\beta}e^{-\beta h} - \beta h\right) = 2Ae^{-\beta h} - \beta = 0.$$

Отсюда критическое значение высоты

$$h_c = \frac{1}{\beta} \ln \frac{2A}{\beta}.$$

Подставляя это значение высоты в формулы для высоты и ускорения, получим

$$a_{max} = A v_0^2 \sin \gamma \exp\left(-\frac{2A}{\beta}e^{-\beta h_c} - \beta h_c\right) = \frac{\beta v_0^2 \sin \gamma}{2e}$$

$$v_c = v_0 \exp\left(-\frac{A}{\beta}e^{-\beta h_c}\right) = v_0 e^{-1/2}$$

Ответ:

$$h_c = \frac{1}{\beta} \ln \frac{2A}{\beta}, \quad v_c = v_0 e^{-1/2}, \quad a_{max} = \frac{\beta v_0^2 \sin \gamma}{2e}$$

В5 ^{0.60}

Для приведенных численных данных найдите скорость (в км/с) и ускорение (в единицах g_0) на высотах $h_1 = 80$ км, $h_2 = 60$ км, $h_3 = 40$ км.

Подставляя значения высоты в формулы для скорости и ускорения, получим

Ответ:

h , км	a/g_0	v , км/с
80	−0.20	7.7

60	−2.8	7.2
40	−5.9	2.7

В6^{0.20}

Найдите максимальное ускорение (в единицах g_0) и критическую высоту h_c , при которой оно достигается.

Ответ:

$$a_{max} = 8.6 \, g_0, \quad h_c = 45.5 \, \text{км}$$

С1^{0.10}

Найдите первую космическую скорость v_s – скорость движения космического корабля по круговой орбите, радиус которой равен радиусу Земли. Выразите ответ через r_0, g_0 .

Запишем уравнение движения для ускорения при движении по окружности

$$\frac{v^2}{r_0} = g_0,$$

Ответ:

$$v_s = \sqrt{g_0 r_0}$$

С2^{0.40}

Определите скорость, с которой космический корабль должен двигаться на высоте h при описанном во введении к этой части движении. Выразите ответ через $v_s, \rho_0, \beta, C_L, S, m, r_0, h$.

Запишем уравнение для нормального ускорения, с учетом того, что производная $\dot{\gamma}$ мала, а $\cos \gamma \approx 1$ и ей можно пренебречь

$$-\frac{L}{m} + g_0 - \frac{v^2}{r_0} = 0.$$

Подставив формулу для подъемной силы, а также для зависимости плотности воздуха от высоты, получим

$$v^2 \left(\frac{1}{r_0} + \frac{C_L S \rho_0}{2m} e^{-\beta h} \right) = g_0,$$

откуда найдем

$$v^2 = \frac{g_0 r_0}{1 + \frac{C_L \rho_0 r_0 S}{2m} \cdot e^{-\beta h}}$$

Ответ:

$$v = \frac{v_s}{\sqrt{1 + \frac{C_L \rho_0 r_0 S}{2m} \cdot e^{-\beta h}}}$$

С3^{0.40}

Определите ускорение a (производную модуля скорости), создаваемое силой сопротивления воздуха при таком движении. Выразите ответ через v, C_L, C_D, r_0, g_0 .

Подъемная сила и сила сопротивления воздуха связаны соотношением

$$\frac{D}{L} = \frac{C_D}{C_L}$$

$$\dot{v} = -D/m = -\frac{C_D}{C_L m} \cdot L = -\frac{C_D}{C_L} \left(g_0 - \frac{v^2}{r_0} \right)$$

Ответ:

$$a = -\frac{C_D}{C_L} \left(g_0 - \frac{v^2}{r_0} \right)$$

C4^{0.50} Пусть начальная скорость космического корабля $v_1 < v_s$, конечная скорость $v_2 < v_1$. Найдите горизонтальное перемещение корабля s за время движения. Считайте, что все изменение модуля скорости происходит за счет силы сопротивления воздуха. Выразите ответ через $r_0, C_L, C_D, v_s, v_1, v_2$.

Используя соотношения $a = dv/dt$ и $v = ds/dt$ (в приближении $\cos \gamma \approx 1$), получим связь перемещения и изменения скорости,

$$\frac{ds}{dv} = \frac{v}{a} = -\frac{C_L}{C_D} \frac{v}{g_0 - v^2/r_0} = -\frac{C_L}{C_D} r_0 \frac{v}{v_s^2 - v^2}.$$

Интегрируя, получаем

$$s = -\frac{C_L}{C_D} r_0 \int_{v_1}^{v_2} \frac{v dv}{v_s^2 - v^2} = -\frac{C_L}{2C_D} r_0 \int_{v_1}^{v_2} dv \left(\frac{1}{v_s - v} + \frac{1}{v_s + v} \right) = \frac{C_L}{2C_D} r_0 \ln \frac{v_s^2 - v_2^2}{v_s^2 - v_1^2}.$$

Ответ:

$$s = \frac{C_L}{2C_D} r_0 \ln \frac{v_s^2 - v_2^2}{v_s^2 - v_1^2}$$

C5^{0.60} Пусть для космического корабля заданы следующие параметры:

- $m = 84 \times 10^3$ кг
- $S = 250$ м²
- $C_D = 0.8$
- $C_L = 0.9$

Найдите значения скорости (в км/с) и ускорения за счет сопротивления воздуха (в единицах g_0) на высотах $h_1 = 80$ км, $h_1 = 60$ км, $h_1 = 40$ км.

Используя формулы для скорости и для ускорения, выраженного через скорость, получим

Ответ:

h , км	a/g_0	v , км/с
80	−0.13	7.3
60	−0.65	4.1
40	−0.87	1.2

C6^{0.20} В условиях предыдущего пункта рассчитайте дальность горизонтального перемещения космического корабля при опускании с высоты $h_0 = 90$ км до высоты $h_f = 30$ км.

Вычислим начальную и конечную скорости космического корабля

$$v_1 = v(h_0) = 7.7 \text{ км/с}, \quad v_2 = v(h_f) = 0.61 \text{ км/с},$$

тогда дальность перемещения

Ответ:

$$s = 11.4 \cdot 10^3 \text{ км}$$

D1^{0.40} Запишите выражения для энергии E и момента импульса L . Выразите ответ через G, m, a, e, M .

Примечание: Может быть удобным записать ЗСЭ в точке апоцентра или перицентра.

Пусть расстояния от земли до корабля в перицентре (наиболее близкой точке) и апоцентре (наиболее удаленной точке) равны соответственно r_1 и r_2 . Скорости корабля в этих точках равны соответственно $L/(mr_1)$ и $L/(mr_2)$. Тогда:

$$E = \frac{L^2}{2mr_1^2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{L^2}{2mr_2^2} - \frac{GMm}{r_2},$$

Выразим отсюда момент импульса L :

$$L^2 = 2mr_1^2 E_1 + 2GMm^2 r_1 = 2mr_2^2 E_2 + 2GMm^2 r_2.$$

Отсюда выразим энергию

$$E(r_2^2 - r_1^2) = GMm^2(r_1 - r_2),$$

а значит

$$E = -\frac{GMm}{r_1 + r_2} = -\frac{GMm}{2a}.$$

Таким же образом выразим момент импульса

$$\frac{L^2}{2m} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad L^2 = 2GMm^2 \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Выражая расстояния через большую полуось и эксцентриситет $r_1 = a(1 - e)$, $r_2 = a(1 + e)$ найдем

$$L^2 = GMm^2 a(1 - e^2).$$

Ответ:

$$E = -\frac{GMm}{2a}, \quad L = \sqrt{GMm^2 a(1 - e^2)}$$

D2 0.20

Запишите уравнение моментов и выражение для мощности силы трения P . Выразите ответ через $\vec{r}$, $\vec{v}$, α .

Ответ:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = -\alpha [\vec{r}, \vec{v}]$$

$$P = -\alpha v^2$$

D3 0.20

Получите выражение для зависимости $\vec{L}$ от t , если в момент времени $t = 0$ $\vec{L} = \vec{L}_0$. Выразите ответ через α , m , $\vec{L}_0$.

Воспользуемся определением для $\vec{L}$, запишем уравнение моментов в виде

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = -\frac{\alpha}{m} \vec{L},$$

Ответ:

$$\vec{L} = \vec{L}_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right)$$

D4 0.30

Покажите что:

$$[\vec{a}, \vec{L}] = \beta \frac{d}{dt} \vec{e}_i$$

Где $\vec{a}$ – ускорение ракеты, $\vec{e}_i$ – некоторый единичный вектор полярных координат с началом в центре Земли. Найдите $\vec{e}_i$ и β .

Примечание: Может быть удобным использовать выражение $\vec{L} = mr^2 \vec{\omega}$.

Второй закон Ньютона имеет вид

$$m\vec{a} = -\frac{GmM}{r^2} \vec{e}_r.$$

Подставим ускорение в векторное произведение:

$$[\vec{a}, \vec{L}] = -\left[\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r, \vec{L}\right] = -GM \left[\frac{1}{r^2} \vec{e}_r, mr^2 \vec{\omega}\right] = GmM [\vec{\omega}, \vec{e}_r] = GmM \frac{d}{dt} \vec{e}_r.$$

Ответ:

$$\beta = GMm, \quad \vec{e}_i = \vec{e}_r$$

D5 0.30 Домножая выражение (1) на $\vec{r}$ скалярно и используя результаты пункта D4, получите зависимость модуля радиус-вектора $\vec{r}$ от φ – угла между векторами $\vec{A}$ и $\vec{e}_r$. Выразите ответ через L, m, G, e, φ, M .

Домножим выражение на $\vec{r}$, получим

$$(\vec{r}, [\vec{v}, \vec{L}]) = GMmr + \vec{A} \cdot \vec{r}.$$

В левой части переставим множители, используя свойства смешанного произведения:

$$(\vec{r}, [\vec{v}, \vec{L}]) = (\vec{L}, [\vec{r}, \vec{v}]) = \frac{L^2}{m}.$$

Тогда получим

$$\frac{L^2}{m} = GMMr(1 + e \cos \varphi),$$

откуда находим

Ответ:

$$r = \frac{L^2/GMm^2}{1 + e \cos \varphi}$$

D6 0.50 Используя выражение (1) и результаты пункта D4, получите зависимость квадрата скорости v^2 от φ . Выразите ответ через L, G, m, e, φ, M .

Возведем выражение (1) в квадрат:

$$[\vec{v}, \vec{L}]^2 = v^2 L^2 = (GMm)^2 + 2GmM\vec{e}_r \cdot \vec{A} + A^2 = (GMm)^2(1 + 2e \cos \varphi + e^2),$$

Ответ:

$$v^2 = \frac{(GMm)^2}{L^2}(1 + e^2 + 2e \cos \varphi)$$

D7 0.40 Получите выражение для среднего по времени квадрата скорости $\langle v^2 \rangle$ в виде интеграла по углу φ . Выразите ответ через $L, m, e, M, G, a, \varphi, \tau$ – период обращения ракеты.

Примечание: Может быть удобным выразить квадрат средней скорости из усредненного ЗСЭ ($\langle T + U \rangle = \langle E \rangle$), где T – кинетическая энергия, U – потенциальная).

Метод 1:

По определению средний квадрат скорости выражается через интеграл как (τ – период движения)

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau v^2 dt.$$

Дифференциалы времени и угла φ можно связать с помощью момента импульса:

$$L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Перейдем к интегрированию по углу

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau v^2 \frac{dt}{d\varphi} d\varphi = \frac{m}{\tau L} \int_0^{2\pi} v^2 r^2 d\varphi.$$

Подставив выражения из D5, D6, получим

$$\langle v^2 \rangle = \frac{L}{m\tau} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^2 + 2e \cos \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi.$$

.

Метод 2:

Из усредненного ЗСЭ получим:

$$\langle T \rangle = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \langle E \rangle - \langle U \rangle = E + \left\langle \frac{GMm}{r} \right\rangle$$

Запишем выражение для среднего по времени $1/r$ в виде интеграла по углу:

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{1}{r} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{1}{r} dt \frac{dt}{d\varphi} d\varphi = \frac{m}{\tau L} \int_0^{2\pi} r d\varphi$$

Подставим все в выражение для $\langle v^2 \rangle$:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{2}{m} \left(E + \frac{L}{\tau} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + e \cos \varphi} \right)$$

Ответ:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{L}{m\tau} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^2 + 2e \cos \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi$$

.

D8 ^{1.00}

Получите выражение для $\langle \dot{E} \rangle$. Выразите ответ через G, m, a, e, M .

Метод 1:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{L}{m\tau} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^2 + 2e \cos \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi$$

.

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^2 + 2e \cos \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1 + e^2 + 2e(1 - t^2)/(1 + t^2)}{(1 + e(1 - t^2)/(1 + t^2))^2} \frac{2dt}{1 + t^2} = \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{(1 + e^2)(1 + t^2) + 2e(1 - t^2)}{(1 + t^2 + e(1 - t^2))^2} dt = 4 \int_0^{+\infty} \frac{(1 + e)^2 + t^2(1 - e)^2}{(1 + e + t^2(1 - e))^2} dt = \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{(1 + e)^2 + t^2(1 - e)^2}{(1 + e + t^2(1 - e))^2} dt = 4 \int_0^{+\infty} \frac{1 + t^2(1 - e)^2/(1 + e)^2}{(1 + t^2(1 - e)/(1 + e))^2} dt \end{aligned}$$

Перейдем к переменной $\tan u = t\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \Rightarrow \frac{du}{\cos^2 u} = dt\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}$

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{+\infty} \frac{1 + t^2(1 - e)^2/(1 + e)^2}{(1 + t^2(1 - e)/(1 + e))^2} dt &= 4\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \int_0^{+\pi/2} \frac{1 + \tan^2 u(1 - e)/(1 + e)}{(1 + \tan^2 u)^2} \frac{du}{\cos^2 u} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{1 - e^2}} \int_0^{+\pi/2} ((1 + e) \cos^2 u + \sin^2 u(1 - e)) du = \frac{4}{\sqrt{1 - e^2}} \int_0^{+\pi/2} du(1 + e \cos 2u) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - e^2}} \end{aligned}$$

Подставим в выражение для среднего:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{L}{m\tau} \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{GMa} \cdot \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \frac{GM}{a}$$

Метод 2:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\tau \frac{(GMm)^2}{L^2\tau} (1 + e^2 + 2e \cos \varphi) dt$$

Усреднение константы даст саму константу, а из результата предыдущего пункта ясно, что переход к переменной φ даст множитель $1/(1 + e \cos \varphi)^2$, соберем в числителе $(1 + e \cos \varphi)$:

$$\begin{aligned} &= \langle v^2 \rangle = \int_0^\tau \frac{(GMm)^2}{L^2\tau} (e^2 - 1 + 2(1 + e \cos \varphi)) dt = \\ &= \frac{(GMm)^2}{L^2} (e^2 - 1) + \int_0^\tau \frac{(GMm)^2}{L^2\tau} (2(1 + e \cos \varphi)) dt = \\ &= \frac{(GMm)^2}{L^2} (e^2 - 1) + \int_0^\tau \frac{(GMm)^2}{L^2\tau} (1 + e \cos \varphi) dt = \end{aligned}$$

Возьмем получившийся интеграл при помощи универсальной тригонометрической подстановки:

$$\begin{aligned} \frac{(GMm)^2}{L^2\tau} \int_0^\tau (1 + e \cos \varphi) dt &= \frac{2L}{m\tau} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + e \cos \varphi} = \frac{4L}{m\tau} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + e(1 - t^2)/(1 + t^2)} \frac{2dt}{1 + t^2} = \\ &= \frac{8L}{m\tau} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2 + e(1 - t^2)} dt = \frac{8L}{m\tau} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + e + t^2(1 - e)} = \frac{8L}{m\tau} \frac{\pi/2}{\sqrt{1 - e^2}} \end{aligned}$$

Подставим в выражение для средней скорости:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{(GMm)^2}{L^2} (e^2 - 1) + \frac{4\pi}{m\tau} \frac{L}{\sqrt{1 - e^2}} = -\frac{GM}{a} + 2\sqrt{GMa} \cdot \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = -\frac{GM}{a} + 2\frac{GM}{a} = \frac{GM}{a}$$

Метод 3:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{2}{m} \left(E + \frac{L}{\tau} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + e \cos \varphi} \right)$$

Возьмем получившийся интеграл при помощи универсальной тригонометрической подстановки:

$$\begin{aligned} \frac{2L}{m\tau} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + e \cos \varphi} &= \frac{4L}{m\tau} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + e(1 - t^2)/(1 + t^2)} \frac{2dt}{1 + t^2} = \\ &= \frac{8L}{m\tau} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2 + e(1 - t^2)} dt = \frac{8L}{m\tau} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + e + t^2(1 - e)} = \frac{8L}{m\tau} \frac{\pi/2}{\sqrt{1 - e^2}} \end{aligned}$$

Подставим в выражение для средней скорости:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{2E}{m} + \frac{4\pi}{m\tau} \frac{L}{\sqrt{1 - e^2}} = -\frac{GM}{a} + 2\sqrt{GMa} \cdot \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = -\frac{GM}{a} + 2\frac{GM}{a} = \frac{GM}{a}$$

Окончательно:

$$\langle \dot{E} \rangle = -\frac{\alpha GM}{a}$$

Ответ:

$$\langle \dot{E} \rangle = -\frac{\alpha GM}{a}$$

$$\langle \dot{E} \rangle = -\frac{\alpha GM}{a}$$

D9^{0.40}

Используя результаты пунктов D1, D3, D8, получите зависимости a и e от t , если в момент времени $t = 0$ $a = a_0$, $e = e_0$.

Из результата предыдущего пункта:

$$\dot{E} = -\frac{\alpha GM}{a} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \right) = \frac{2\alpha}{m} \frac{1}{a}$$

$$a = a_0 e^{-2\alpha t/m}$$

Подставим выражение для полуоси в зависимость момента импульса от времени:

$$L = m\sqrt{GMa(1-e^2)} \Rightarrow \sqrt{a(1-e^2)} = \sqrt{a_0(1-e_0^2)}e^{-\alpha t/m}$$

$$\sqrt{1-e^2} = \sqrt{1-e_0^2} \Rightarrow e = e_0$$

Ответ:

$$a = a_0 e^{-2\alpha t/m}$$

$$e = e_0$$

D10^{0.10}

Найдите время снижения орбиты T с высоты $h_0 = 408$ км до высоты $h = 400$ км, если параметр $\alpha = 7.17 \cdot 10^{-5}$ кг/с, масса $m = 420$ т, $r_0 = 6378$ км. Выразите ответ в сутках.

Из результата предыдущего пункта:

$$T = \frac{m}{2\alpha} \ln \frac{r_0 + h_0}{r_0 + h}$$

Ответ:

$$T = 40 \text{ суток}$$