

A1 ^{0.20} Запишите в векторном виде выражение для мгновенной скорости $\vec{v}$ фрагмента dm в рассматриваемый момент. Ответ выразите через $\vec{\Omega}$, $\vec{r}$.

Используем формулу Эйлера для твёрдого тела.

Ответ:

$$\vec{v} = [\vec{\Omega} \times \vec{r}]$$

A2 ^{0.20} Запишите в векторном виде выражение для момента импульса $d\vec{L}$ фрагмента dm в рассматриваемый момент. Ответ выразите через $\vec{\Omega}$, $\vec{r}$, dm .

По определению, момент импульса элемента массой dm :

Ответ:

$$d\vec{L} = dm[\vec{r} \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}]]$$

A3 ^{0.30} Получите выражения для компонент вектора $d\vec{L} = (dL_x, dL_y, dL_z)$ в системе координат $OXYZ$. Ответ выразите через $X, Y, Z, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, dm$.

Раскроем двойное векторное произведение в выражении для $d\vec{L}$:

$$d\vec{L} = dm(\vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})) = dm(\vec{\Omega}r^2 - \vec{r}(\vec{\Omega} \cdot \vec{r})).$$

Распишем полученное векторное выражение покомпонентно:

$$\begin{aligned} dL_x &= dm(\Omega_x(X^2 + Y^2 + Z^2) - X(\Omega_x X + \Omega_y Y + \Omega_z Z)), \\ dL_y &= dm(\Omega_y(X^2 + Y^2 + Z^2) - Y(\Omega_x X + \Omega_y Y + \Omega_z Z)), \\ dL_z &= dm(\Omega_z(X^2 + Y^2 + Z^2) - Z(\Omega_x X + \Omega_y Y + \Omega_z Z)). \end{aligned}$$

Упрощая, получаем ответ.

Ответ:

$$\begin{aligned} dL_x &= dm(\Omega_x(Y^2 + Z^2) - \Omega_y XY - \Omega_z XZ) \\ dL_y &= dm(-\Omega_x YX + \Omega_y(X^2 + Z^2) - \Omega_z YZ) \\ dL_z &= dm(-\Omega_x ZX - \Omega_y ZY + \Omega_z(X^2 + Y^2)) \end{aligned}$$

A4 ^{0.50} Для произвольного движения твердого тела можно записать момент импульса в виде

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\Omega_x + I_{xy}\Omega_y + I_{xz}\Omega_z; \\ L_y &= I_{yx}\Omega_x + I_{yy}\Omega_y + I_{yz}\Omega_z; \\ L_z &= I_{zx}\Omega_x + I_{zy}\Omega_y + I_{zz}\Omega_z. \end{aligned}$$

Получите выражения для коэффициентов $I_{xx}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, I_{yy}, I_{yz}, I_{zx}, I_{zy}, I_{zz}$ в виде интегралов по dm . Интеграл по dm представляет собой сумму по бесконечно малым участкам твердого тела массы dm .

Например, координаты центра масс можно записать как

$$X_c = \frac{1}{m} \int X dm; \quad Y_c = \frac{1}{m} \int Y dm, \quad Z_c = \frac{1}{m} \int Z dm.$$

В дальнейших пунктах полученные здесь формулы не используются.

Ответ получается интегрированием по dm выражений предыдущего пункта.

Ответ:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int dm(Y^2 + Z^2) & I_{yy} &= \int dm(X^2 + Z^2) & I_{zz} &= \int dm(X^2 + Y^2) \\ I_{xy} &= I_{yx} = - \int dm XY & I_{yz} &= I_{zy} = - \int dm YZ & I_{zx} &= I_{xz} = - \int dm XZ \end{aligned}$$

A5 ^{0.50} Получите выражения для $\vec{L}$ и T в главных осях. Ответ выразите через $I_x, I_y, I_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

В главных осях выражения для компонент момента импульса $\vec{L}$ принимают вид

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z.$$

Отсюда следует ответ.

Ответ:

$$\vec{L} = I_x \omega_x \vec{e}_x + I_y \omega_y \vec{e}_y + I_z \omega_z \vec{e}_z$$

Согласно условию

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}.$$

Используя найденное выше выражение для $\vec{L}$, приходим к ответу.

Ответ:

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)$$

A6 ^{0.50} Получите выражения для компонент вектора $\dot{\vec{L}}$ в подвижной системы координат $\left(\dot{\vec{L}}\right)_x, \left(\dot{\vec{L}}\right)_y, \left(\dot{\vec{L}}\right)_z$. Ответ выразите через $I_x, I_y, I_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$.

Продифференцируем ранее полученное выражение для $\vec{L}$. Так как единичные орты системы координат подвижны, их тоже необходимо дифференцировать.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= I_x \frac{d}{dt}(\omega_x \vec{e}_x) + I_y \frac{d}{dt}(\omega_y \vec{e}_y) + I_z \frac{d}{dt}(\omega_z \vec{e}_z) = \\ &= I_x \dot{\omega}_x \vec{e}_x + I_y \dot{\omega}_y \vec{e}_y + I_z \dot{\omega}_z \vec{e}_z + I_x \omega_x \dot{\vec{e}}_x + I_y \omega_y \dot{\vec{e}}_y + I_z \omega_z \dot{\vec{e}}_z = \\ &= I_x \dot{\omega}_x \vec{e}_x + I_y \dot{\omega}_y \vec{e}_y + I_z \dot{\omega}_z \vec{e}_z + (\vec{\omega} \times (I_x \omega_x \vec{e}_x + I_y \omega_y \vec{e}_y + I_z \omega_z \vec{e}_z)) = \\ &= I_x \dot{\omega}_x \vec{e}_x + I_y \dot{\omega}_y \vec{e}_y + I_z \dot{\omega}_z \vec{e}_z + (\vec{\omega} \times \vec{L}) \end{aligned}$$

Распишем в координатах векторное произведение:

$$[\vec{\omega} \times \vec{L}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x(\omega_y L_z - \omega_z L_y) + \vec{e}_y(\omega_z L_x - \omega_x L_z) + \vec{e}_z(\omega_x L_y - \omega_y L_x)$$

Таким образом получаем проекции $\dot{\vec{L}}$ на оси системы $Oxyz$.

Ответ:

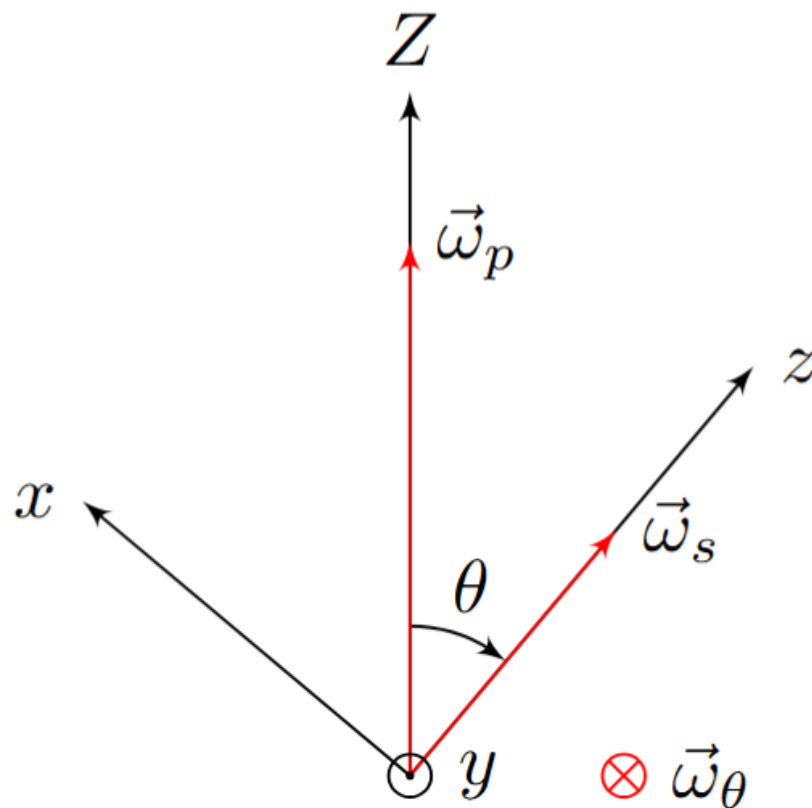
$$\begin{aligned} \left(\dot{\vec{L}}\right)_x &= I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z \\ \left(\dot{\vec{L}}\right)_y &= I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x \\ \left(\dot{\vec{L}}\right)_z &= I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y \end{aligned}$$

B1 ^{0.40} Найдите проекции угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Выразите ответ через $\omega_s, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \theta$.

Проецируя $\vec{\omega}_s, \vec{\omega}_\theta, \vec{\omega}_\varphi$ на оси x, y, z и учитывая

$$\vec{\omega}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_y, \quad \vec{\omega}_\varphi = \dot{\varphi} \vec{e}_z,$$

получим ответ.



Ответ:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\varphi} \sin \theta \\ \omega_y &= -\dot{\theta} \\ \omega_z &= \omega_s + \dot{\varphi} \cos \theta\end{aligned}$$

B2^{0.40} Покажите, что проекция L_1 момента импульса $\vec{L}$ на **неподвижную вертикальную** ось OZ постоянна. Покажите, что проекция L_2 момента импульса $\vec{L}$ на **подвижную** ось Oz постоянна.

Момент силы тяжести выражается по формуле

$$\vec{M} = \vec{l} \times m\vec{g},$$

из которой следует, что $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости OZz . Из уравнения моментов в неподвижных осях следует

$$\dot{L}_1 = \dot{L}_Z = M_Z = 0.$$

Из уравнения Эйлера для оси Oz следует

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = 0.$$

В силу симметрии $I_x = I_y$, поэтому

$$\dot{L}_2 = I_z \dot{\omega}_z = 0.$$

Отметим, что перпендикулярности $\vec{M}$ и Oz для сохранения L_2 недостаточно.

B3^{0.60} Используя результаты пункта A5, выразите значения проекций L_1 и L_2 через $\omega_s, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \theta, A, C$.

Выразим L_1 через проекции $\vec{L}$:

$$L_1 = L_z \cos \theta + L_x \sin \theta = A \omega_x \sin \theta + C \omega_z \cos \theta.$$

Используя результат пункта B1, получаем окончательный ответ для L_1 :

$$L_1 = C(\omega_s + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta + A \dot{\varphi} \sin^2 \theta.$$

Для L_2 верно

$$L_2 = L_z = C \omega_z = C(\omega_s + \dot{\varphi} \cos \theta).$$

Ответ:

$$L_1 = C(\omega_s + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta + A\dot{\varphi} \sin^2 \theta$$

$$L_2 = C(\omega_s + \dot{\varphi} \cos \theta)$$

В4^{0.70}

В этом пункте будем считать, что $l = 0$, и момент силы тяжести можно не учитывать. Пусть момент импульса волчка равен L_0 и направлен вдоль оси OZ . В момент времени $t = 0$ значения углов $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$. Найдите зависимость углов θ , φ от времени. Такое движение называется регулярной прецессией.

В описанном случае

$$L_1 = L_0, \quad L_2 = L_0 \cos \theta.$$

В силу постоянства величин L_0 , L_1 , L_2 угол θ также остаётся постоянным.

Используя выражения для L_1 , L_2 из предыдущего пункта, получаем систему уравнений:

$$BEEQUATION$$

Решая систему, получаем

$$\dot{\varphi} = \frac{L_0}{A}$$

Далее зависимость φ от времени получается простым интегрированием.

Ответ:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 \\ \varphi(t) &= \varphi_0 + \frac{L_0}{A}t \end{aligned}$$

С1^{0.60}

Для произвольного положения волчка выразите полную энергию E движения волчка (сумму кинетической и потенциальной) через ω_s , $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, A , C , m , g , l , θ .

Запишем выражения для потенциальной и кинетической энергий:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(C\omega_z^2 + A(\omega_x^2 + \omega_y^2)) = \frac{1}{2}(C(\omega_s + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + A(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)), \\ \Pi &= mgl \cos \theta. \end{aligned}$$

Полная энергия:

$$E = T + \Pi.$$

Ответ:

$$E = \frac{1}{2}(C(\omega_s + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + A(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)) + mgl \cos \theta$$

С2^{0.30}

Выразите ω_s и $\dot{\varphi}$ через L_1 , L_2 , A , C , θ , используя результаты пункта В3.

Ответ получается путём решения системы относительно ω_s , $\dot{\varphi}$.

$$\begin{cases} L_1 = \dot{\varphi}(A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) + C\omega_s \cos \theta \\ L_2 = C(\omega_s + \dot{\varphi} \cos \theta) \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{L_1 - L_2 \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \\ \omega_s &= \frac{L_2}{C} - \frac{L_1 - L_2 \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \cos \theta \end{aligned}$$

С3^{0.60}

Используя постоянство L_1 , L_2 , приведите выражение для полной энергии E к виду

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{\theta}^2 + U(\theta).$$

Получите выражения для μ , $U(\theta)$ через A , C , L_1 , L_2 , m , g , l .

Примечание. Как известно, полная энергия определена с точностью до константы, которую для удобства можно положить равной нулю.

Подстановка в выражение для энергии ω_s и $\dot{\varphi}$ из предыдущего пункта приводит к результату

$$E = \frac{A}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(L_1 - L_2 \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta + \frac{L_2^2}{2C}.$$

Последнее константное слагаемое можно отбросить:

$$E = \frac{A}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(L_1 - L_2 \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta.$$

Из полученного выражения следует ответ.

Ответ:

$$\mu = A$$

$$U(\theta) = mgl \cos \theta + \frac{(L_1 - L_2 \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta}$$

D1 ^{0.80} Найдите период колебаний волчка. Ответ получите в виде определённого интеграла, содержащего A , C , l , θ_0 , g . Получите также упрощённое выражение для случая $\pi - \theta_0 \ll 1$.

Для заданных начальных условий

$$L_1 = L_2 = 0.$$

Закон сохранения энергии в этом случае запишется в виде

$$\frac{A \dot{\theta}^2}{2} + mgl \cos \theta = mgl \cos \theta_0.$$

Отсюда выражается зависимость $\dot{\theta}(\theta)$:

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2mgl}{A} (\cos \theta_0 - \cos \theta)}.$$

Движение от $\theta = \theta_0$ до $\theta = \pi$ с $\dot{\theta} > 0$ занимает четверть периода. Для нахождения этого времени требуется проинтегрировать уравнение

$$dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}}.$$

Интегрируем:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{A}{2mgl}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}.$$

Отсюда следует ответ.

Ответ:

$$T = 4 \sqrt{\frac{A}{2mgl}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}$$

Введём переменную $\beta = \pi - \theta$, тогда $\beta \ll 1$.

1 метод

С учётом малости β выражение для энергии запишется в виде:

$$E = \frac{A \dot{\beta}^2}{2} + mgl \frac{\beta^2}{2}$$

Такой вид уравнения соответствует гармоническим колебаниям с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{mgl}}.$$

2 метод

Введём $\beta_0 = \pi - \theta_0$. Преобразуем интеграл

$$\int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}$$

в рассматриваемом приближении.

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} &= \int_{\beta_0}^0 \frac{-d\beta}{\sqrt{\cos(\pi - \beta_0) - \cos(\pi - \beta)}} = \int_0^{\beta_0} \frac{d\beta}{\sqrt{\cos \beta - \cos \beta_0}} \simeq \\ &\simeq \sqrt{2} \int_0^{\beta_0} \frac{d\beta}{\sqrt{\beta_0^2 - \beta^2}} = \sqrt{2} \int_0^{\beta_0} \frac{\frac{d\beta}{\beta_0}}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\beta_0^2}}} = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sqrt{2} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Подстановка найденного значения в исходное выражение для T приводит к ответу, полученному способом 1.

Ответ:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{mgl}}$$

D2^{0.20}

Выразите L_1 и L_2 через A, C, ω_0 .

В заданной ситуации $L_1 = L_2$. Их значения мгновенно получаются из выражения $\vec{L}$ в главных осях.

Ответ:

$$L_1 = L_2 = C\omega_0$$

D3^{0.50}

Найдите условие, связывающее A, C, m, g, l, ω_0 , при котором положение $\theta = 0$ является устойчивым для отклонений, описанных выше. Это условие называется условием Маиевского.

Оказывается, что при выполнении найденного условия положение равновесия является устойчивым даже при отказе от условия сохранения L_1 и L_2 .

При $L_1 = L_2 = C\omega_0$ выражение для энергии принимает вид

$$E = \frac{A}{2} \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta + \frac{C^2 \omega_0^2 (1 - \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta}.$$

Разложим с учётом малости θ :

$$E = \frac{A \dot{\theta}^2}{2} + \left(\frac{C^2 \omega_0^2}{4A} - mgl \right) \frac{\theta^2}{2}.$$

Для устойчивости необходимо, чтобы коэффициент перед θ^2 был положительным, что определяет требуемое условие.

Ответ:

$$\frac{C^2 \omega_0^2}{4A} > mgl$$

D4^{0.70}

Получите уравнение на θ , которому удовлетворяет угол θ_1 . Уравнение может содержать A, C, L_1, L_2, m, g, l .
Подсказка. $U(\theta)$ можно представить в виде функции от новой переменной $s = \cos \theta$, что значительно упрощает решение.

В положении равновесия $\frac{d}{d\theta} U(\theta) = 0$. Перейдём к переменной $s = \cos \theta$. Тогда

$$\frac{d}{d\theta} U(\theta) = \frac{d}{ds} U(s) \cdot \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{ds} U(s) \cdot \sin \theta.$$

Отсюда следует, что условие

$$\frac{d}{d\theta} U(\theta) = 0$$

эквивалентно условию

$$\frac{d}{ds}U(s) = 0$$

для всех $\theta \in (0, \pi/2)$.

Получим $\frac{d}{ds}U(s)$

$$U(s) = mgl s + \frac{(L_1 - L_2 s)^2}{2A(1 - s^2)}$$

$$\frac{d}{d\theta}U(s) = mgl - \frac{(L_1 - L_2 s)L_2}{A(1 - s^2)} + \frac{(L_1 - L_2 s)^2}{A(1 - s^2)^2}.$$

Упростим выражение и перейдём обратно к переменной θ . Приравнивая его к нулю, получим требуемое уравнение.

Ответ:

$$\frac{(L_2 \cos \theta - L_1)(L_2 - L_1 \cos \theta)}{\sin^4 \theta} + Amgl = 0$$

D5 ^{0.80} Найдите возможные скорости прецессии волчка ω_p при $\theta = \theta_1$. Ответ выразите через $A, C, m, g, l, \omega_s, \theta_1$. Одним из способов решения может быть подстановка в уравнение из D4 выражений для L_1, L_2 через угловые скорости ω_s, ω_p .

Подставляя выражения для L_1 и L_2 из пункта В3 в полученное в прошлом пункте уравнение, приходим к квадратному уравнению на ω_p :

$$\omega_p^2(A - C) \cos \theta_1 - \omega_p C \omega_s + mgl = 0.$$

Оно имеет два решения, что и является ответом.

Ответ:

$$\omega_p = \frac{C \omega_s}{2(A - C) \cos \theta_1} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgl(A - C) \cos \theta_1}{C^2 \omega_s^2}} \right)$$

D6 ^{0.30} Получите приближенные выражения для частот в случае $mgl \ll C\omega_s^2$. Считайте, что A и C – величины одного порядка.

Разложим ω_p , используя приближённую формулу $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$, для $x \ll 1$.
Для большего корня:

Ответ:

$$\omega_p^{fast} = \frac{C \omega_s}{(A - C) \cos \theta_1}$$

Для меньшего корня:

Ответ:

$$\omega_p^{slow} = \frac{mgl}{C \omega_s}$$

Отметим, что частота ω_p^{slow} совпадает с частотой прецессии «быстрого» волчка в упрощённой модели, то есть при пренебрежении вкладом прецессии в момент импульса.

D7 ^{0.70} Определите угол α_{max} максимального отклонения оси волчка от горизонтали в процессе последующего движения. Ответ выразите через A, C, m, g, l, ω_0 .

Запишем выражение для энергии с учётом начальных условий:

$$L_1 = 0,$$

$$L_2 = C\omega_0.$$

$$E = \frac{A\dot{\theta}^2}{2} + mgl \cos \theta + \frac{C^2 \omega_0^2 \cos^2 \theta}{2A \sin^2 \theta} = 0.$$

Перейдём к переменной α по формуле:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Тогда

$$\frac{A\dot{\alpha}^2}{2} - mgl \sin \alpha + \frac{C^2 \omega_0^2 \sin^2 \alpha}{2A \cos^2 \alpha} = 0.$$

Условие $\alpha = \alpha_{max}$ соответствует $\dot{\alpha} = 0$. Подставляя $\dot{\alpha} = 0$ в уравнение выше и преобразовывая, получаем квадратное уравнение на синус максимального угла отклонения:

$$\sin^2 \alpha_{max} + \frac{C^2 \omega_0^2}{2Amgl} \sin \alpha_{max} - 1 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$\sin \alpha_{max} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{C^2 \omega_0^2}{4Amgl} \right)^2} - \frac{C^2 \omega_0^2}{4Amgl}$$

Так как $|\sin \alpha_{max}| \leq 1$, следует выбрать корень с «+».

Ответ:

$$\alpha_{max} = \arcsin \left(\sqrt{1 + \left(\frac{C^2 \omega_0^2}{4Amgl} \right)^2} - \frac{C^2 \omega_0^2}{4Amgl} \right)$$

D8^{0.70}

Найдите зависимость угла отклонения оси волчка от горизонтали от времени $\alpha(t)$. Ответ выразите через A, C, m, g, l, ω_0 .

Запишем приближённое выражение для α_{max} в этом случае:

$$\alpha_{max} = \frac{2Amgl}{C^2 \omega_0^2} \sim \frac{mgl}{C \omega_0^2} \ll 1.$$

В силу малости α_{max} можем рассматривать выражение для энергии для малых α . С учётом начальных условий полная энергия равна нулю.

$$\frac{A\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{C^2 \omega_0^2}{2A} \alpha^2 - mgl \alpha = 0$$

Такой вид выражения для энергии соответствует колебаниям с частотой

$$\omega = \frac{C}{A} \omega_0,$$

амплитудой

$$\alpha_0 = \frac{Amgl}{C^2 \omega_0^2}$$

и смещением от центра

$$\alpha_1 = \alpha_0 = \frac{Amgl}{C^2 \omega_0^2}.$$

С учётом всех найденных параметров движения и начальных условий получаем зависимость $\alpha(t)$.

Ответ:

$$\alpha(t) = \frac{Amgl}{C^2 \omega_0^2} \left(1 - \cos \left(\frac{C}{A} \omega_0 t \right) \right)$$

D9^{0.50}

Найдите зависимость угла прецессии от времени $\varphi(t)$. В начальный момент $\varphi(0) = \varphi_0$. Ответ выразите через $A, C, m, g, l, \omega_0, \varphi_0$.

Выразим $\dot{\varphi}(t)$, используя найденную зависимость $\alpha(t)$:

$$\dot{\varphi} = \frac{L_1 - L_2 \cos \theta}{A \sin^2 \theta} = \frac{C \omega_0 \sin \alpha}{A \cos^2 \alpha} \simeq \frac{mgl}{C \omega_0} \left(1 - \cos \left(\frac{C}{A} \omega_0 t \right) \right)$$

Интегрируя, получаем ответ.

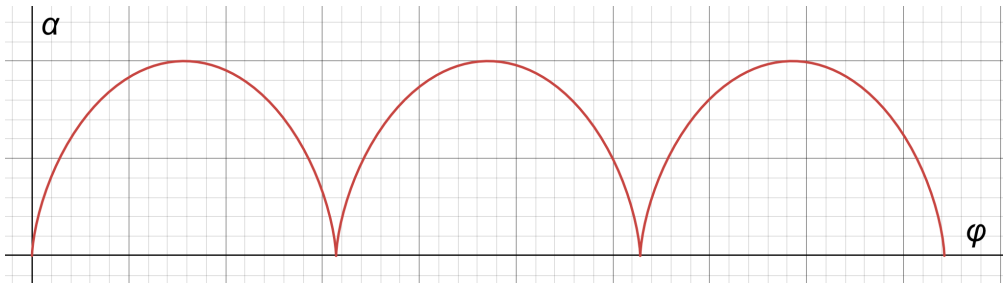
Ответ:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{mgl}{C \omega_0} \left(t - \frac{A}{C \omega_0} \sin \left(\frac{C}{A} \omega_0 t \right) \right)$$

D10^{0.50} Изобразите характерный график зависимости $\alpha(\varphi)$. Определите угол $\Delta\varphi$, на который поворачивается ось волчка между двумя последовательными возвращениями оси волчка в горизонтальное положение. Ответ выразите через A, C, m, g, l, ω_0 .

Выражения $\varphi(t), \alpha(t)$ параметрически задают циклоиду, характерный вид котором представлен на рисунке ниже.

Ответ:



Время между последующими моментами $\alpha = 0$ составляет $t = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{A}{C}$. Подставляя t в выражение для φ , получаем ответ.

Ответ:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi A m g l}{C^2 \omega_0^2}$$

D11^{0.50} Рассчитайте для описанной системы $\Delta\varphi$.

Найдём A, C, l :

$$\begin{aligned} C &= \frac{(2m)R^2}{2} = mR^2 \\ A &= \frac{(2m)R^2}{4} + (2m)R^2 + \frac{mR^2}{3} = \frac{17}{6}mR^2 \\ l &= \frac{2mR + m\frac{R}{2}}{3m} = \frac{5}{6}R \end{aligned}$$

Подставим в формулу для $\Delta\varphi$ найденные величины (требуется также учесть, что масса волчка составляет $3m$) и получим ответ.

Ответ:

$$\Delta\varphi = \frac{17}{120}\pi$$