

A1^{0.50} Пусть в начальный момент времени $t = 0$ ток через контакт равен нулю. В этот момент на контакт подали напряжение V . Определите зависимость тока от времени $I(t)$. Выразите ответ через Φ_0, V, I_c, R .

Напряжение задает производную разности фаз на контакте

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{\Phi_0} V.$$

Поскольку до включения напряжения ток равен нулю, начальная фаза $\varphi(0) = 0$. (При включении напряжения фаза не может измениться мгновенно, поскольку быстрое изменение фазы приводит к бесконечно большому напряжению.) Тогда фаза имеет вид

$$\varphi = \frac{2\pi}{\Phi_0} Vt.$$

Тогда полный ток складывается из нормального тока $I_n = V/R$ и сверхпроводящего тока $I_s = I_c \sin \varphi$

Ответ:

$$I = \frac{V}{R} + I_c \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} Vt\right)$$

A2^{0.50} Пусть через контакт пропускается постоянный ток $I > I_c$. Запишите дифференциальное уравнение для $\varphi(t)$.

Запишем полный ток как сумму нормального тока и сверхпроводящего, выразив напряжение через производную фазы, в результате получим

Ответ:

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \dot{\varphi}$$

A3^{0.70} Продифференцируйте уравнение по времени. Исключите из уравнения фазы и получите выражение для $\dot{V}(t)^2$ через V, I и параметры системы.

Дифференцируя уравнение, получим

$$(I_c \cos \varphi) \dot{\varphi} + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \ddot{\varphi} = 0.$$

Производную $\dot{\varphi}$ выразим через напряжение

$$V(I_c \cos \varphi) + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \dot{V} = 0,$$

а косинус фазы – через синус из исходного уравнения,

$$I_c \sin \varphi = I - \frac{V}{R}, \quad I_c^2 \cos^2 \varphi = I_c^2 - \left(I - \frac{V}{R}\right)^2,$$

Окончательно получим

Ответ:

$$\dot{V}^2 = \left(\frac{2\pi R}{\Phi_0}\right)^2 V^2 \left(I_c^2 - \left(I - \frac{V}{R}\right)^2\right)$$

A4^{0.30} В предыдущем уравнении перейдите к переменной $u = 1/V$, выразите $\dot{u}^2$ через u, I и параметры системы.

Выразим производную напряжения

$$\dot{V} = -\frac{\dot{u}}{u^2},$$

подставим в уравнение

$$\frac{\dot{u}^2}{u^4} = \left(\frac{2\pi R}{\Phi_0}\right)^2 \frac{1}{u^2} \left(I_c^2 - \left(I - \frac{1}{Ru}\right)^2\right).$$

Домножая на u^4 , получим

Ответ:

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{2\pi R}{\Phi_0} \right)^2 \left(I_c^2 u^2 - \left(Iu - \frac{1}{R} \right)^2 \right)$$

A5^{0.80}

У вас должно получиться уравнение, аналогичное закону сохранения энергий для колебаний гармонического осциллятора. Определите частоту колебаний ω , значение u_0 , относительно которого происходят колебания, и амплитуду колебаний A .

Продифференцировав уравнение из предыдущего пункта, получим уравнение колебаний

$$\ddot{u} = - \left(\frac{2\pi R}{\Phi_0} \right)^2 \left((I^2 - I_c^2)u - \frac{I}{R} \right).$$

Из коэффициента перед u находим частоту колебаний

$$\omega = \frac{2\pi R}{\Phi_0} \sqrt{I^2 - I_c^2},$$

а также положение равновесия

$$u_0 = \frac{I}{R(I^2 - I_c^2)}.$$

Для того, чтобы найти амплитуду колебаний, определим значения u , при которых $\dot{u} = 0$, получим квадратное уравнение

$$(I^2 - I_c^2)u^2 - \frac{2I}{R}u + \frac{1}{R^2} = 0,$$

корни которого

$$u = \frac{1}{I^2 - I_c^2} \left(\frac{I}{R} \pm \frac{I_c}{R} \right), \quad u_1 = \frac{1}{R(I + I_c)}, \quad u_2 = \frac{1}{R(I - I_c)}.$$

Тот же результат можно найти, определив максимальное и минимальное значения напряжения из уравнения

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{V}{R}, \quad V_{min} = R(I - I_c), \quad V_{max} = R(I + I_c).$$

Тогда амплитуда

$$A = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) = \frac{I_c}{R(I^2 - I_c^2)}.$$

Ответ:

$$\omega = \frac{2\pi R}{\Phi_0} \sqrt{I^2 - I_c^2}; \quad u_0 = \frac{I}{R(I^2 - I_c^2)}; \quad A = \frac{I_c}{R(I^2 - I_c^2)}.$$

A6^{0.20}

Запишите зависимость $V(t)$. Считайте, что при $t = 0$ значение $V(t)$ имеет минимум.

Зависимость величины u от времени

$$u = u_0 + A \cos \omega t,$$

где фаза определяется тем условием, что V минимальна в начальный момент времени, а значит u максимальна.

Ответ:

$$V = \frac{R(I^2 - I_c^2)}{I + I_c \cos \left(\frac{2\pi R}{\Phi_0} \sqrt{I^2 - I_c^2} t \right)}$$

A7^{0.60}

Постройте качественные графики зависимости $V(t)$ для случаев $I = 1.1I_c$ и $I = 3I_c$, укажите координаты характерных точек.

Ответ:

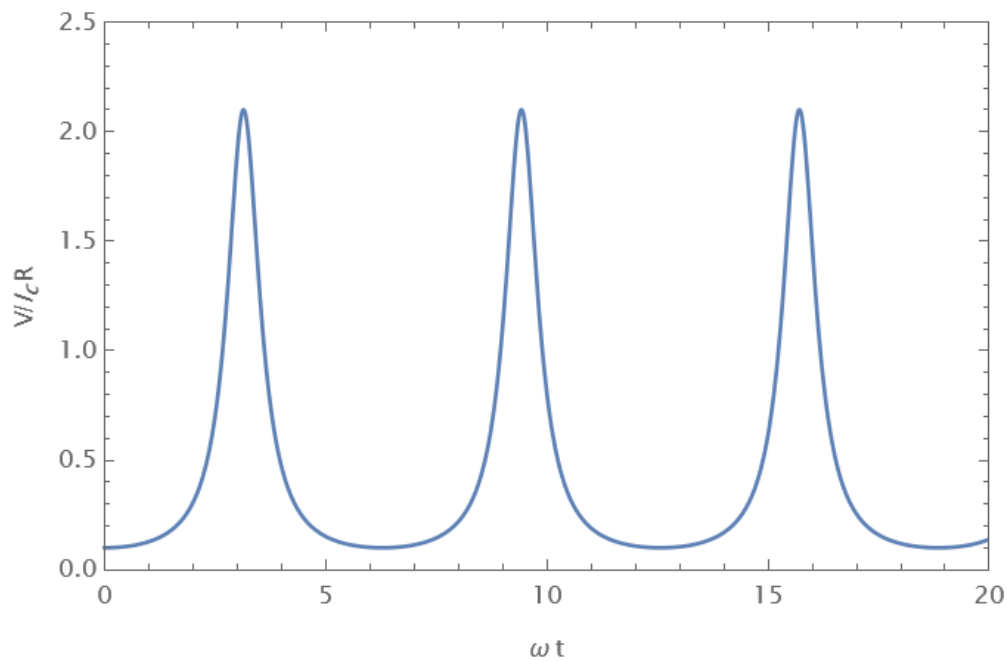


График для случая $I = 1.1 I_c$

Ответ:

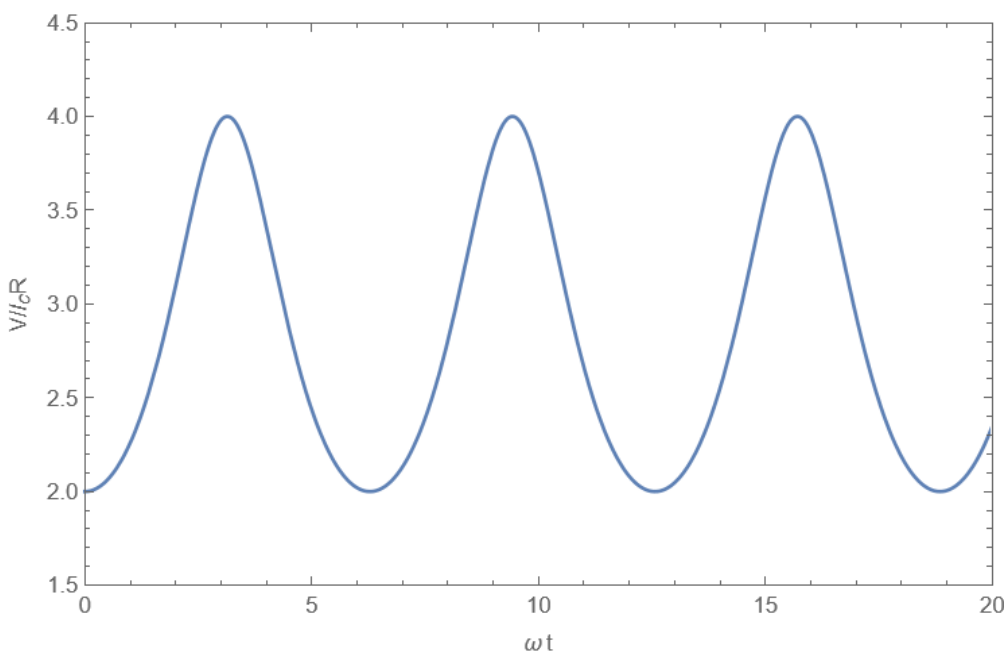


График для случая $I = 3 I_c$

A8 0.80

Найдите среднее (по времени) значение напряжения на контакте. Выразите ответ через R, I, I_c .

Выразим напряжение через производную фазы и проинтегрируем по времени

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi} \dot{\varphi}, \quad \int_0^T V(t) dt = \frac{\Phi_0}{2\pi} (\varphi(T) - \varphi(0)).$$

Если T – период колебаний, то $\varphi(T) - \varphi(0) = 2\pi$, а среднее значение напряжения равно

$$\langle V \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \frac{\Phi_0}{T} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \omega = R \sqrt{I^2 - I_c^2}.$$

Этот же результат можно получить интегрированием явного выражения для $V(t)$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{R(I^2 - I_c^2)}{I + I_c \cos(\omega t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R(I^2 - I_c^2)}{I + I_c \cos \theta} d\theta,$$

где $\theta = \omega t$. Этот интеграл можно вычислить с помощью подстановки

$$\xi = \tan \frac{\theta}{2}, \quad \cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad d\theta = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{I + I_c \cos \theta} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{I + I_c \cos \theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{I + I_c \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{I + I_c + (I - I_c)t^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{I^2 - I_c^2}}.$$

Отсюда получается тот же ответ

Ответ:

$$V = R\sqrt{I^2 - I_c^2}$$

A9^{0.70} Определите зависимость энергии $E(\varphi)$ джозефсоновского контакта в зависимости от разности фаз φ на нем. В ответ также могут входить Φ_0 и I_c . Считайте, что $E(0) = 0$.

Мощность источника

$$P = IV = I_s V = I_c \sin \varphi \frac{\Phi_0}{2\pi} \dot{\varphi}.$$

Вклад нормального тока в мощность имеет вид

$$P_n = I_n V = \frac{1}{R} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\varphi}^2.$$

При увеличении характерного времени изменения фазы T эта мощность изменяется как $1/T^2$, поэтому полное выделившееся тепло ведет себя как $(1/T^2)T \sim 1/T$ и его можно сделать сколь угодно малым, увеличивая T .
Интегрируя по времени, найдем работу, совершенную источником.

$$A = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \int \sin \varphi \dot{\varphi} dt = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \int_0^\varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} (1 - \cos \varphi).$$

Эта работа и равна энергии джозефсоновского контакта.

Ответ:

$$E = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} (1 - \cos \varphi)$$

A10^{0.20} Для типичного джозефсоновского контакта значение критического тока $I_c = 0.5$ мА, сопротивление $R = 0.7$ Ом. Фундаментальные постоянные $e = 1.602 \times 10^{-19}$ Кл, $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ Дж · с. Найдите численное значение энергии джозефсоновского контакта $E(\pi)$ и частоту колебаний напряжения при постоянном токе через контакт $I = 2I_c$.

$$E(\pi) = \frac{\hbar I_c}{e} = 3.3 \times 10^{-19} \text{ Дж},$$

$$\omega = 2\sqrt{3} \frac{e R I_c}{\hbar} = 1.84 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}$$

B1^{0.30} Пусть в контакт втекает постоянный ток I (см. рис. во введении к задаче). Запишите дифференциальное уравнение, описывающее изменение разности фаз φ . В ответ также могут входить Φ_0 , R , C , I_c .

К выражению для тока из части A2 нужно добавить ток, который идет на зарядку конденсатора, $I_C = \dot{q} = C\dot{V}$, причем производная напряжения выражается через вторую производную фазы

Ответ:

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\Phi_0}{2\pi R} \dot{\varphi} + \frac{\Phi_0 C}{2\pi} \ddot{\varphi}$$

B2^{0.60} Пусть внешний ток равен нулю, а разность фаз $\varphi \ll 1$. В этом случае φ (а значит и другие величины, характеризующие контакт) будет совершать затухающие колебания. Определите частоту колебаний ω_p .

При малых значениях фазы уравнение имеет вид (после деления на коэффициент перед второй производной)

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{RC} \dot{\varphi} + \frac{2\pi I_c}{\Phi_0 C} \varphi = 0.$$

Это уравнение имеет стандартный вид уравнения затухающих колебаний

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

с коэффициентами

$$\omega_0^2 = \frac{2\pi I_c}{\Phi_0 C}, \quad \gamma = \frac{1}{2RC}.$$

Тогда частота $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, Этот ответ можно получить, подставит в уравнение решение вида $\varphi = Ae^{i\omega t}$, найдя соответствующие значения ω и взяв вещественную часть.

Ответ:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2\pi I_c}{\Phi_0 C} - \frac{1}{4R^2 C^2}}$$

В3 0.60 Определите добротность колебательной системы из предыдущего пункта Q . При каких значениях емкости в системе возможны колебания, а не затухающее движение?

Добротность можно выразить как

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = R\sqrt{\frac{2eI_c C}{\hbar}}.$$

Колебания возможны, пока значение ω_p вещественно, иначе решение уравнения на φ будет представлять собой сумму затухающих экспонент, отсюда находим

$$C \geq \frac{\Phi_0}{8\pi R^2 I_c}.$$

Ответ:

$$Q = R\sqrt{\frac{2eI_c C}{\hbar}}, \quad C \geq \frac{\Phi_0}{8\pi R^2 I_c}.$$

С1 1.20 Пусть критические токи через контакты равны I_{ac} и I_{bc} соответственно. Тогда максимальный сверхпроводящий ток I , который может течь через такой контакт, будет зависеть от магнитного потока через интерферометр. Определите это максимальное значение I_0 , а также косинусы разностей фаз φ_a , φ_b , при которых этот максимум достигается. Выразите ответ через I_{ac} , I_{bc} , Φ , Φ_0 . Ваши ответы не должны содержать обратных тригонометрических функций.

Полный ток через контакты равен

$$I = I_a + I_b = I_{ac} \sin \varphi_a + I_{bc} \sin \varphi_b.$$

Используем соотношение между фазами $\varphi_b = \varphi_a - \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi = 2\pi\Phi/\Phi_0$, получим после преобразований

$$I = I_{ac} \sin \varphi_a + I_{bc} \sin(\varphi_a - \Delta\varphi) = (I_{ac} + I_{bc} \cos \Delta\varphi) \sin \varphi_a - I_{bc} \sin \Delta\varphi \cos \varphi_a = I_0 \sin(\varphi_a - \psi),$$

где амплитуда

$$I_0^2 = (I_{ac} + I_{bc} \cos \Delta\varphi)^2 + (I_{bc} \sin \Delta\varphi)^2 = I_{ac}^2 + I_{bc}^2 + 2I_{ac}I_{bc} \cos \Delta\varphi,$$

а фаза определяется соотношениями

$$I_0 \cos \psi = I_{ac} + I_{bc} \cos \Delta\varphi, \quad I_0 \sin \psi = I_{bc} \sin \Delta\varphi.$$

Ток будет максимальным, если аргумент синуса равен $\pi/2$, то есть $\varphi_a = \psi + \pi/2$, откуда

$$\cos \varphi_a = -\sin \psi = -\frac{I_{bc} \sin \Delta\varphi}{\sqrt{I_{ac}^2 + I_{bc}^2 + 2I_{ac}I_{bc} \cos \Delta\varphi}}.$$

Косинус второй фазы можно получить, используя симметрию между контактами a и b (если записать выражение для I_0 через φ_b , выражение будет отличаться только заменой a на b в индексах и изменением знака $\Delta\varphi$). Иначе его можно найти прямым вычислением

$$\cos \varphi_b = \cos(\varphi_a - \Delta\varphi) = \cos \varphi_a \cos \Delta\varphi + \sin \varphi_a \sin \Delta\varphi.$$

Подставив выражения для косинуса и синуса через ψ , получим

$$\cos \varphi_b = -\sin \psi \cos \Delta\varphi + \cos \psi \sin \Delta\varphi = -\frac{I_{bc} \sin \Delta\varphi}{I_0} \cos \Delta\varphi + \frac{I_{ac} + I_{bc} \cos \Delta\varphi}{I_0} \sin \Delta\varphi,$$

$$\cos \varphi_b = \frac{I_{ac} \sin \Delta\varphi}{\sqrt{I_{ac}^2 + I_{bc}^2 + 2I_{ac}I_{bc} \cos \Delta\varphi}}.$$

Ответ:

$$I_0 = \sqrt{I_{ac}^2 + I_{bc}^2 + 2I_{ac}I_{bc} \cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}$$

$$\cos \varphi_a = -\frac{I_{bc} \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}{\sqrt{I_{ac}^2 + I_{bc}^2 + 2I_{ac}I_{bc} \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}}$$

$$\cos \varphi_b = \frac{I_{ac} \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}{\sqrt{I_{ac}^2 + I_{bc}^2 + 2I_{ac}I_{bc} \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}}$$