

A1 0.30 Чему равен поток вектора относительной скорости жидкости через произвольную замкнутую поверхность, не пересекающую поверхность шара? Ответ обоснуйте.

Примечание: потоком вектора относительной скорости жидкости через замкнутую поверхность называется величина Φ , определяемая выражением:

$$\Phi = \oint_S \vec{v}_{\text{отн}}(\vec{r}) d\vec{S}.$$

В силу несжимаемости жидкости её масса внутри выбранной поверхности постоянна:

$$0 = \frac{dm}{dt} = \oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho \Phi$$

Ответ:

$$\Phi = 0$$

A2 0.10 Чему равна нормальная компонента скорости жидкости $v_{\text{отн},n}$ в системе отсчёта, связанной с шаром?

Ответ: $v_{\text{отн},n} = 0$

A3 0.10 Чему равна относительная скорость жидкости $\vec{v}_{\infty}$ на бесконечном удалении от шара?

Ответ: Теорема о циркуляции и теорема Гаусса (п. A1) в дифференциальной форме:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}_{\text{отн}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \vec{v}_{\text{отн}} = 0$$

Граничные условия:

$$v_{\text{отн},n} = 0$$

$$\vec{v}_{\text{отн}}(\infty) = -\vec{v}_0$$

A4 0.40 Рассмотрим сверхпроводящее тело, помещенное в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$. Напишите выражение для циркуляции магнитного поля $\vec{B}(\vec{r})$ по контуру, не пересекающему поверхность сверхпроводника, и выражение для потока магнитного поля через замкнутую поверхность, не пересекающую поверхность сверхпроводника. Также укажите граничные условия магнитного поля на границе тела и на бесконечном удалении от него.

Ответ: Теорема о циркуляции и теорема Гаусса (п. A1) в дифференциальной форме:

$$\vec{\nabla} \times B = 0$$

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0$$

Граничные условия:

$$B_{\text{отн},n} = 0$$

$$\vec{B}_{\text{отн}}(\infty) = \vec{B}_0$$

A5 0.80 Поместим сверхпроводящий шар радиусом R в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$. Найдите индукцию магнитного поля $\vec{B}(\vec{r})$ во всем пространстве вне шара. Ответ выразите через $\vec{B}_0, \vec{r}$ и R .

Известно, что поле сверхпроводящего шара, помещённого в однородное магнитное поле совпадает с полем магнитного диполя. Выражение для суммарного магнитного поля принимает вид

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

где m - магнитный момент.

Из условия нулевой нормальной составляющей магнитного поля на поверхности шара получим

$$(\vec{B}\vec{r}) = (\vec{B}_0\vec{r}) + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(\vec{m}\vec{r})}{R^4} = 0$$

Из последнего соотношения находим магнитный момент шара

$$\vec{m} = -\frac{2\pi R^3}{\mu_0} \vec{B}_0$$

После нахождения магнитного момента выражение для магнитного поля принимает вид:

Ответ:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 - \frac{3R^3(\vec{B}_0\vec{r})\vec{r}}{2r^5} + \frac{\vec{B}_0R^3}{2r^3}$$

A6^{0.20} Пользуясь результатами предыдущих пунктов, найдите зависимость $\vec{v}_{\text{отн}}(\vec{r})$.

Система уравнений на $\vec{v}_{\text{отн}}(\vec{r})$ совпадает с системой уравнений на $\vec{B}(\vec{r})$ с точностью до замены $\vec{B}_0 = -\vec{v}_0$.

Ответ:

$$\vec{v}_{\text{отн}}(\vec{r}) = -\vec{v}_0 + \frac{3R^3(\vec{v}_0\vec{r})\vec{r}}{2r^5} - \frac{\vec{v}_0R^3}{2r^3}$$

A7^{0.40} Рассмотрим стационарное движение несжимаемой жидкости с нулевой вязкостью по тонкой трубке. Пусть p — давление в жидкости, φ — потенциальная энергия единицы массы жидкости, а v — скорость течения в трубке. Используя законы сохранения энергии и массы, покажите, что для всех точек трубки выполняется соотношение (уравнение Бернулли):

$$\varphi + \frac{p}{\rho} + \frac{v_{\text{отн}}^2}{2} = const$$

Ответ: В системе отсчёта шара распределение скоростей в пространстве, а значит и линии тока, не зависят от времени. Выделим одну линию тока, через которую протекает массовый расход $\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dv}{dt}$. В выберем две точки (1) и (2) в этой линии тока. Рассмотрим жидкость, заключенную между этими двумя точками. Мощность внешней силы давления в точке (1) равна $P_1 = p_1 \frac{dV}{dt} = p_1 \frac{dm}{dt} / \rho$, а в точке (2) равна $P_2 = -p_2 \frac{dV}{dt} = p_2 \frac{dm}{dt} / \rho$. За время dt работа сил давлений уходит на разгон кусочка жидкости массой dm от скорости v_1 до скорости v_2 :

$$(P_1 + P_2) \cdot dt = dm(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2})$$

$$p_1/\rho - p_2/\rho = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}$$

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Что и требовалось доказать.

A8^{0.60} Считая, что давление на бесконечном удалении от шара равно p_0 , найдите зависимость $p(\theta)$ на поверхности шара. Выразите ответ через p_0 , ρ , v_0 , θ .

Запишем уравнение Бернулли, полученое в пункте A7 в двух точках - на бесконечности и на поверхности шара:

$$p(\theta) + \frac{\rho v_{\text{пов}}^2(\theta)}{2} = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}$$

$$p(\theta) = p_0 + \frac{\rho(v_0^2 - v_{\text{пов}}^2(\theta))}{2}$$

В формулу из пункта A6 подставим $r = R$:

$$\vec{v}_{\text{пов}}(\vec{e}_r) = -\vec{v}_0 + \frac{3(\vec{v}_0\vec{e}_r)\vec{e}_r}{2} - \frac{\vec{v}_0}{2} = \frac{3}{2}(-\vec{v}_0 + (\vec{v}_0\vec{e}_r)\vec{e}_r)$$

$$\vec{v}_{\text{пов}}^2(\vec{e}_r) = \frac{9}{4}(v_0^2 - 2(\vec{v}_0\vec{e}_r)^2 + (\vec{v}_0\vec{e}_r)^2) = \frac{9}{4}(v_0^2 - (\vec{v}_0\vec{e}_r)^2) = \frac{9}{4}v_0^2 \sin^2 \theta$$

Ответ:

$$p(\theta) = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta\right)$$

A9^{0.40} Вычислите равнодействующую сил давления, действующих на поверхность шара. Выразите ответ через $\vec{v}_0$, R , ρ .

Ответ: Зависимость $p(\theta)$ - чётная функция, а значит сила не изменится если мы начнём отсчитывать θ от противоположного полюса шара. Следовательно, компоненты силы, сонаправленной $\vec{v}_0$, нет. Другие компоненты отсутствуют в силу симметрии.

A10^{0.10} Найдите распределение скорости жидкости $\vec{v}(\vec{r})$ в лабораторной системе отсчёта.

Ответ:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{отн}}(\vec{r}) = \frac{3R^3(\vec{v}_0\vec{r})\vec{r}}{2r^5} - \frac{\vec{v}_0R^3}{2r^3}$$

A11^{0.80} Чему равна кинетическая энергия жидкости E_k в лабораторной системе отсчёта? Выразите ответ через ρ , R , v_0 .

Для вычисления кинетической энергии жидкости необходимо вычислить интеграл $\int \frac{\rho v^2 dV}{2}$.

Выделим при данном угле θ сегмент с углом $d\theta$ и толщиной dr .Объём данного элемента равен $2\pi r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta$.Тогда

$$W_{\text{к}} = \int_R^\infty \int_0^\pi \rho \pi r^2 \sin(\theta) dr d\theta v^2(\theta)$$

Найдём $v^2(\theta)$ из теоремы косинусов

$$v^2(\theta) = \frac{v^2 \left(1 + 3 \cos^2(\theta)\right) R^6}{4r^6}$$

Комбинация последнего выражения и уже полученного интеграла даёт

$$\int_R^\infty \frac{dr}{r^4} = \frac{1}{3R^3}$$

$$\int_0^\pi \sin(\theta)(1 + 3 \cos^2(\theta))d\theta = \int_1^{-1} -(d \cos(\theta) + 3 \cos^2(\theta)d \cos(\theta)) = 4$$

Ответ:

$$W_{\text{к}} = \frac{\pi \rho R^3 v^2}{3}$$

A12^{0.20} Найдите присоединённую массу μ . Выразите ответ через ρ , R .

Ответ:

$$\mu = \frac{2W_{\text{к}}}{v^2} = \frac{2\pi \rho R^3}{3}$$

A13^{0.30} Рассмотрим шар, движущийся со скоростью $\vec{v}_0$ и ускорением $\vec{a}_0$. Используя выражение для импульса $\vec{p}$ жидкости, получите выражение для силы $\vec{F}$, действующей на шар со стороны жидкости. Ответ выразите через ρ , R и $\vec{a}_0$.

Согласно первому закону ньютона, на воду со стороны шара действует сила $-\vec{F}$ Второй закон Ньютона для жидкости:

$$-\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{p}) = \mu \vec{a}_0$$

.

Ответ:

$$\vec{F} = -\mu \vec{a}_0$$

A14^{0.30}

Получите зависимость кривизны K поверхности пузыря от угла θ . Используйте p_{in} , p_0 , ρ , θ и v_0 .

Примечание: кривизной K поверхности называется сумма обратных главных радиусов кривизны:

$$K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Она связана с Лапласовым давлением как:

$$\Delta p = \sigma K$$

$$\Delta P = p_{in} - p_0 - \frac{\rho v_0^2}{2} + \frac{9\rho v_0^2}{8}\sin^2(\theta) = \sigma K$$

Ответ:

$$K = \frac{1}{\sigma} (p_{in} - p_0 - \frac{\rho v_0^2}{2} + \frac{9\rho v_0^2}{8}\sin^2(\theta))$$

B1^{0.60}

С учётом малости ε величины R_1 и R_2 можно представить в виде:

$$R_1(\theta) \approx R(1 + A_1\varepsilon - B_1\varepsilon \sin^2 \theta) \qquad R_2 \approx R(1 + A_2\varepsilon - B_2\varepsilon \sin^2 \theta).$$

Найдите B_1 и B_2 . Далее слагаемыми $A_1\varepsilon$ и $A_2\varepsilon$ можно пренебречь.

Если вы не смогли решить данный пункт, то далее можно считать, что $B_1 = B_2 = 1$. К потере последующих баллов это не приводит.

Найдём радиус кривизны в плоскости (x, y) . Формула для радиуса кривизны в двумерных координатах:

$$R = \frac{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta$$

Производные выразим через θ :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R \cos^3 \theta}$$

Затем мы растянули всё тело в k раз по оси x . Первая и вторая производная $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ в каждой точке изменятся в k раз.

$$R_1(\theta) = \frac{(1 + (dy'/dx)^2)^{3/2}}{d^2y'/dx^2} = \frac{(1 + (kdy'/dx)^2)^{3/2}}{kd^2y/(dx)^2} = \frac{(1 + k^2 \cdot (dy/dx)^2)^{3/2}}{k \cdot d^2y/dx^2} =$$

$$= kR \cos^3 \theta (1 + k^2 \cdot \tan^2 \theta)^{3/2} = \frac{R}{k} \cdot (\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}$$

Считая $R \approx a$:

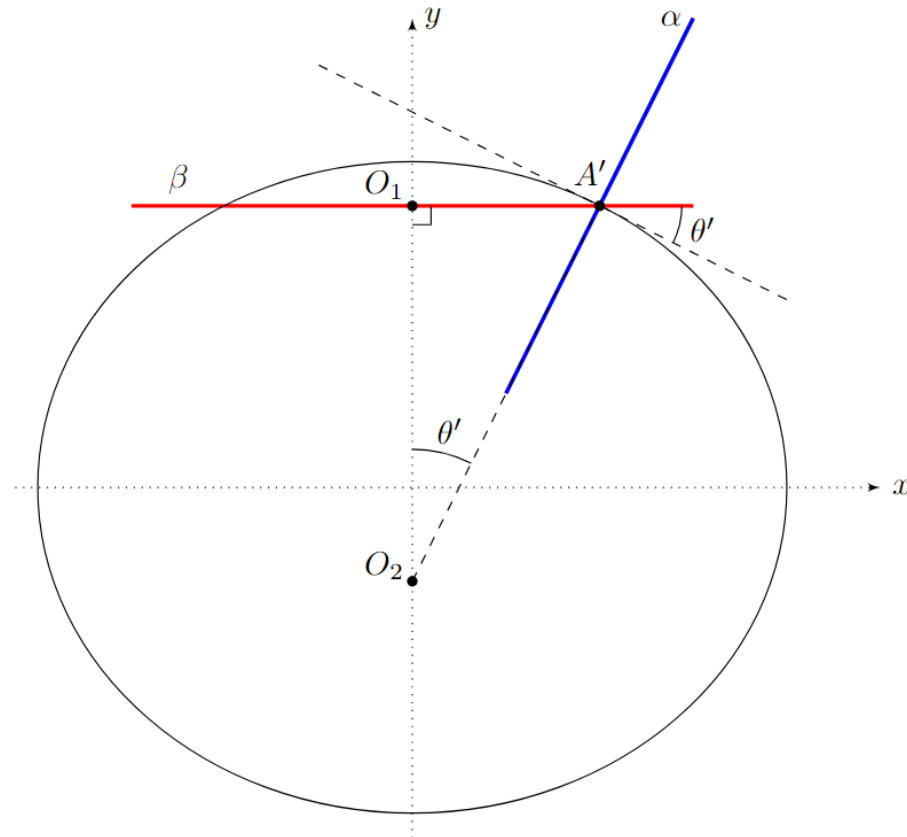
$$R_1(\theta) = \frac{a}{k} \cdot (\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = \frac{a}{1 - \varepsilon} \cdot (\cos^2 \theta + (1 - \varepsilon)^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \approx$$

$$\approx a(1 + \varepsilon)(\cos^2 \theta + (1 - 2\varepsilon) \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = a(1 + \varepsilon)(1 - 2\varepsilon \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \approx$$

$$\approx a(1 + \varepsilon)(1 - 3\varepsilon \sin^2 \theta) \approx a(1 + \varepsilon - 3\varepsilon \sin^2 \theta) \approx R(1 + \varepsilon - 3\varepsilon \sin^2 \theta)$$

Получаем: $A_1 = 1$; $B_1 = 3$;

Теперь найдем радиус кривизны в плоскости α , перпендикулярной x, y и содержащей нормаль к поверхности в точке A' . Тогда мы сможем воспользоваться формулой Лапласа для давления поверхностного натяжения.



На рисунке сверху α и β - плоскости, перпендикулярные плоскости рисунка. В точке A' , кривая, получаемая при сечении эллипсоида плоскостью β , имеет центр кривизны O_1 . Аналогично, кривая, получаемая при сечении эллипсоида плоскостью α , имеет центр кривизны O_2 . Теорема Мёнье гласит, что так как O_2 является главным центром кривизны, то его проекция на плоскость β есть центр кривизны в этой плоскости - то есть O_1 .

$$R_2 = R_\alpha = R_\beta / \sin \theta'$$

$R_\beta = R \sin \theta$ - радиус кривизны в плоскости β . Он не меняется при растягивании. Тогда:

$$R_2 = R \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}$$

При этом θ' также является углом наклона касательной к эллипсу в точке A' :

$$\tan \theta' = \left(\left| \frac{dy}{dx} \right| \right)_{A'} = k \cdot \left(\left| \frac{dy}{dx} \right| \right)_A = k \tan \theta$$

Тогда:

$$\begin{aligned} R_2(\theta) &= \frac{R \sin \theta}{\sin \theta'} = R \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta'}}{\tan \theta'} = \\ &= R \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \cdot \frac{\sqrt{1 + k^2 \tan^2 \theta}}{k \tan \theta} = \frac{R}{k} \sqrt{\frac{1 + k^2 \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{R}{k} \sqrt{\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

Считая $R \approx a$:

$$\begin{aligned} R_2(\theta) &= \frac{a}{k} \sqrt{\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta} = \frac{a}{1 - \varepsilon} \sqrt{\cos^2 \theta + (1 - \varepsilon)^2 \sin^2 \theta} \approx \\ &\approx a(1 + \varepsilon) \sqrt{\cos^2 \theta + (1 - 2\varepsilon) \sin^2 \theta} = a(1 + \varepsilon) \sqrt{1 - 2\varepsilon \sin^2 \theta} \approx \\ &\approx a(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon \sin^2 \theta) \approx a(1 + \varepsilon - \varepsilon \sin^2 \theta) \approx R(1 + \varepsilon - \varepsilon \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Получаем: $A_2 = 1$; $B_2 = 1$;

В2^{0.20}

Найдите зависимость кривизны эллипсоида $K(\theta)$ в первом порядке по ε . Выразите ответ через R, θ .

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{R(1 - B_1 \varepsilon \sin^2 \theta)} + \frac{1}{R(1 - B_2 \varepsilon \sin^2 \theta)} \approx \frac{1}{R} (1 + B_1 \varepsilon \sin^2 \theta + 1 + B_2 \varepsilon \sin^2 \theta) = \\ &= \frac{1}{R} (2 + (B_1 + B_2) \varepsilon \sin^2 \theta) = \frac{1}{R} (2 + 4\varepsilon \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

В3^{0.60}

Чему равна величина ε для пузыря, рассмотренного в пункте А14? Ответ выразите через скорость пузыря v_0 , радиус пузыря R , коэффициент поверхностного натяжения σ и плотность жидкости ρ .

Вспользуемся формулой для Лапласова Давления:

$$\Delta p = \sigma K$$

Согласно пункту А13:

$$\Delta P = p_{in} - p_0 - \frac{\rho v_0^2}{2} + \frac{9\rho v_0^2}{8} \sin^2(\theta) = \sigma/R \cdot (2 + 4\varepsilon \sin^2 \theta)$$

Так как равенство выполняется для всех углов θ , то коэффициенты перед слагаемыми $\sin^2 \theta$ должны быть равны:

$$\frac{9\rho v_0^2}{8} = \frac{4\varepsilon\sigma}{R}$$

Ответ:

$$\varepsilon = \frac{9R\rho v_0^2}{32\sigma}$$

В40.30

Чему равен эксцентриситет e пузыря, рассмотренного в пункте A14? Ответ выразите через скорость пузыря v_0 , радиус пузыря R , коэффициент поверхностного натяжения σ и плотность жидкости ρ .

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2} \approx \sqrt{2\varepsilon} = \sqrt{\frac{9R\rho v_0^2}{16\sigma}}$$

В50.80

Сферический пузырь с начальным диаметром $d = 2\text{мм}$ поднимается в воде плотностью $\rho = 10^3\text{кг/с}$ и поверхностным натяжением $\sigma = 72 \cdot 10^{-3}\text{ Н/м}$. Проведя необходимые измерения, вычислите скорость пузыря на последних трёх фотографиях. Также вычислите ускорение пузыря a .

$$v_2^2 = v_3^2 - 2al_{23}$$

l_{23} можно получить сравнивая расстояние с горизонтальным диаметром пузырей на первых снимках.

$$l_{23} = 2.8\text{мм}$$

Ответ:

$$v_1 = 17\text{см/с}, v_2 = 26\text{см/с}, v_3 = 32\text{см/с}, a = 6\text{м/с}^2$$

С10.60

Чему равно его ускорение a в начальный момент времени? Ответ выразите через g .

С пренебрегая массой воздуха:

$$0 = 0 + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g - \mu a - \pi R^2 \rho v^2$$

В начальный момент времени скорость пузыря равна нулю, а значит:

$$a = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\mu} g = 2g$$

Ответ:

$$a = 2g$$

С20.30

Найдите установившуюся скорость пузыря v_{max} . Чему равно ε при установившейся скорости? Ответы выразите через R , g , ρ и σ .

Ускорение пузыря равно нулю:

$$0 = 0 + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g - \pi R^2 \rho v_{\text{max}}^2$$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{4}{3}Rg}$$

$$\varepsilon = \frac{9R\rho v_{\text{max}}^2}{32\sigma} = \frac{9R\rho}{32\sigma} \cdot \frac{4}{3}Rg = \frac{3R^2 \rho g}{8\sigma}$$

СЗ 0.60 Рассчитайте численные значения $v_{\max}$ и ε для $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\sigma = 72 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$ и $R = 1 \text{ мм}$. Применима ли выбранная модель для указанного радиуса?

Ответ:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{4}{3} R g} = 12 \text{ см/с}$$
$$\varepsilon = \frac{3 R^2 \rho g}{8 \sigma} = 5.2 \cdot 10^{-2} \ll 1$$
$$\varepsilon \ll 1 \Rightarrow \text{Модель применима}$$

D1 0.20 Докажите, что давление воды в точках на поверхности пузыря постоянно.

Ответ: Давление над пузырем рассчитывается по формуле

$$p = p_{in} - \sigma K$$

где оба слагаемых постоянны.

D2 1.00 Найдите зависимость давления над поверхностью пузыря $p(\theta)$, используя ρ , v_0 , g , R , θ и h .

Запишем уравнение Бернулли в системе отсчёта пузыря для линии тока с поверхности водоёма до некоторой точки на пузыре:

$$p_0 + \rho g h + \frac{\rho v_0^2}{2} = p(\theta) + \frac{\rho v^2(\theta)}{2} + \rho g R (\cos \theta - 1)$$

Мы это можем сделать, так как линии тока в этой системе отсчёта постоянны в силу $h \gg R$ (Краевыми эффектами, возникающими на поверхности водоёма, пренебрегаем)

Согласно условию, распределение скоростей такое же, как в части А:

Ответ:

$$p(\theta) = p_0 + \rho g h + \rho \frac{v_0^2}{2} \rho g R (1 - \cos \theta) - \frac{9}{8} \rho v_0^2 \sin^2 \theta$$

D3 0.80 Получите выражение для установившейся скорости пузыря v_0 . Рассчитайте значение для $R = 30 \text{ см}$ и $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Разложим формулу из предыдущего пункта до второго порядка по углу θ :

$$p(\theta) = p_0 + \rho g h + \rho \frac{v_0^2}{2} + \rho g R \cdot \theta^2 / 2 - \frac{9}{8} \rho v_0^2 \cdot \theta^2$$

Используя факт постоянства давления, приравняем коэффициенты перед θ^2 :

$$\rho g R / 2 = \frac{9}{8} \rho v_0^2$$

Ответ:

Ответ:

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{9} R g} = 1.2 \text{ м/с}$$