

A1^{0.20} Пусть сторона квадратного отверстия равна $a = 1$ м. Найдите характерный угловой размер β отверстия при взгляде с экрана. Сравните его с угловым размером Солнца.

Рассчитаем угловой размер стороны квадрата. Так как $a \ll L$, то:

$$\beta \approx \frac{a}{L}.$$

Ответ:

$$\beta \approx 6^\circ$$

Ответ:

$$\beta \gg \alpha$$

A2^{0.20} Пусть теперь сторона квадратного отверстия равна $a = 5$ мм. Найдите характерный угловой размер β отверстия при взгляде с экрана. Сравните его с угловым размером Солнца.

Аналогично прошлому пункту:

$$\beta \approx \frac{a}{L}.$$

Ответ:

$$\beta \approx 0.03^\circ$$

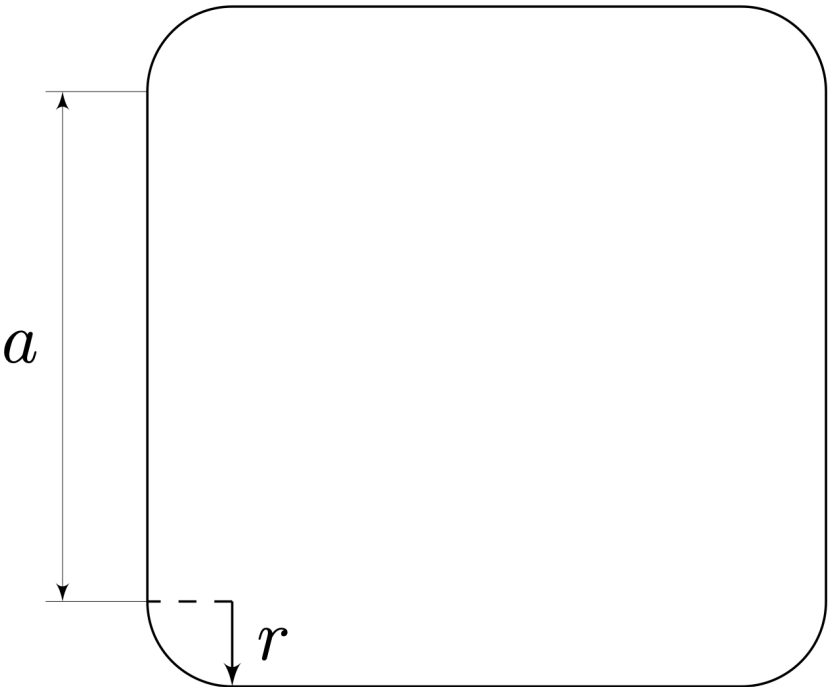
Ответ:

$$\beta \ll \alpha$$

A3^{0.30} В листах ответов качественно приведите изображение Солнца при $a = 1$ м. Укажите размеры, характеризующие это изображение.

Изображение будет иметь вид квадрата с скруглёнными углами. Прямая часть стороны имеет длину a , радиус кривизны углов равен $r = \frac{\alpha L}{2} = 4.4$ см.

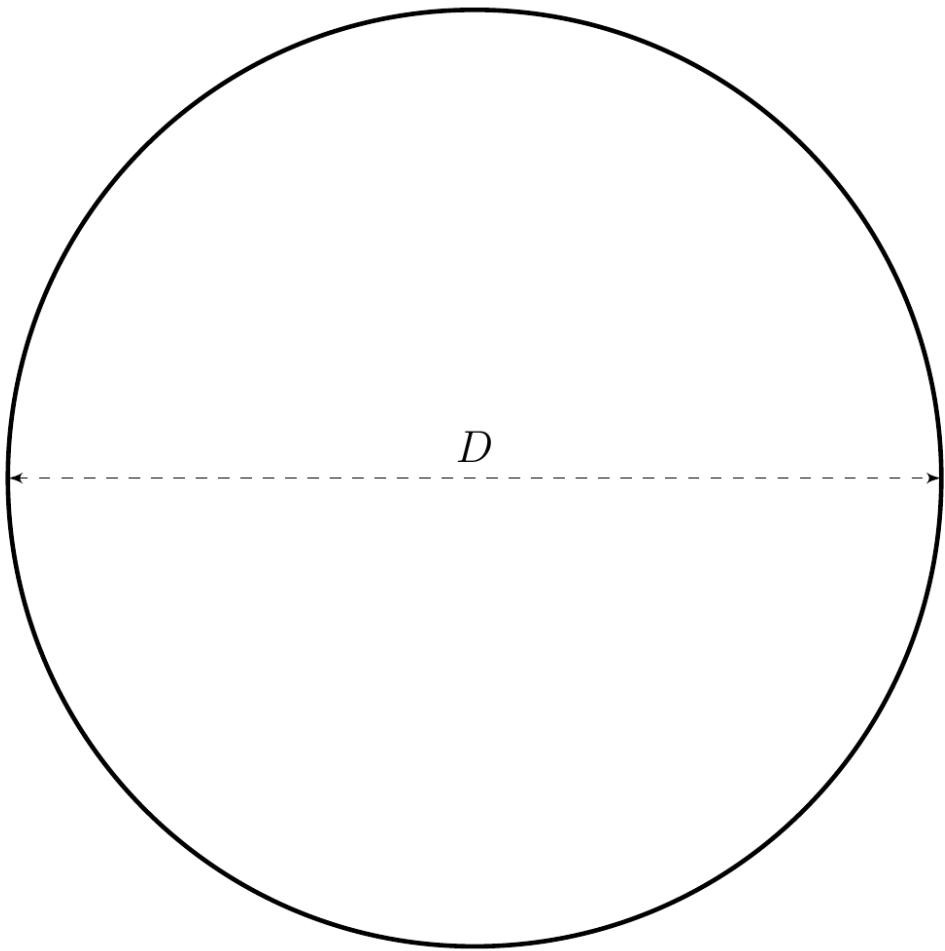
Ответ:



A4^{0.50} В листах ответов качественно приведите изображение Солнца при $a = 5$ мм. Укажите размеры, характеризующие это изображение.

В этом случае изображение будет слабо отличаться от круга диаметром $D = \alpha L = 8.7$ см.

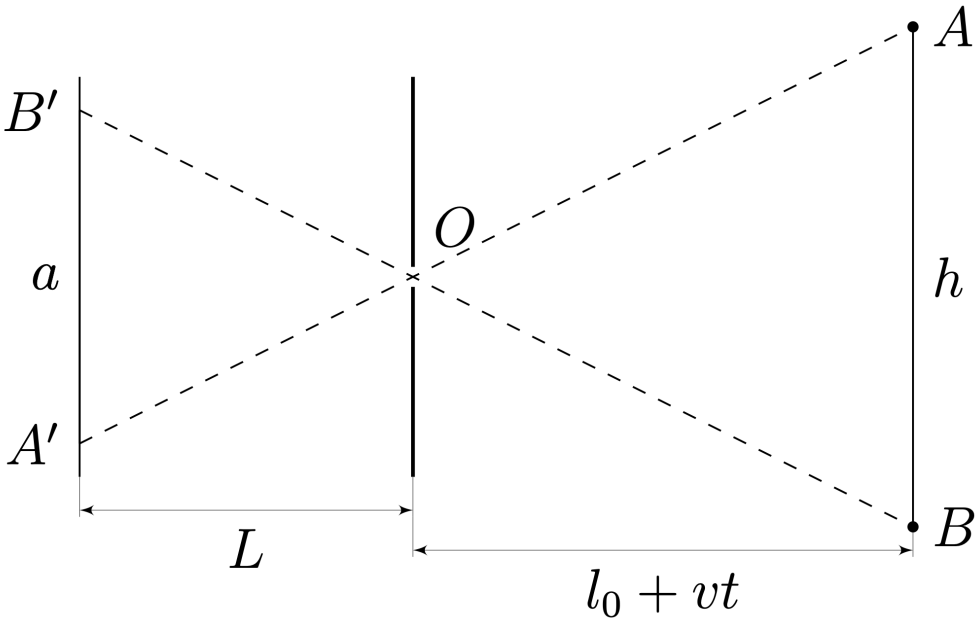
Ответ:



B1^{0.30} Найдите зависимость размера a изображения человека от времени t .

Из подобия треугольников AOB и $A'O'B'$:

$$\frac{a}{h} = \frac{L}{l_0 + vt}.$$



Ответ:

$$a = \frac{Lh}{l_0 + vt}.$$

B2^{0.70} На рисунке показаны изображения взрослого человека и Солнца (угловой размер Солнца $\alpha = 0.5^\circ$) в неизвестном масштабе. Оцените, на каком расстоянии был взрослый человек в момент фотографирования.

Угловые размеры Солнца и человека одного порядка, поэтому можно считать, что все лучи параксиальные и размеры на фотографии пропорциональны угловым размерам.
Из рисунка отношение угловых размеров человека и Солнца:

$$\frac{h/l}{\alpha} = \frac{75\text{мм}}{30\text{мм}} = \frac{5}{2}.$$

Для оценки возьмём $h = 2\text{м}$:

$$l = \frac{2h}{5\alpha} \approx 90 \text{ м.}$$

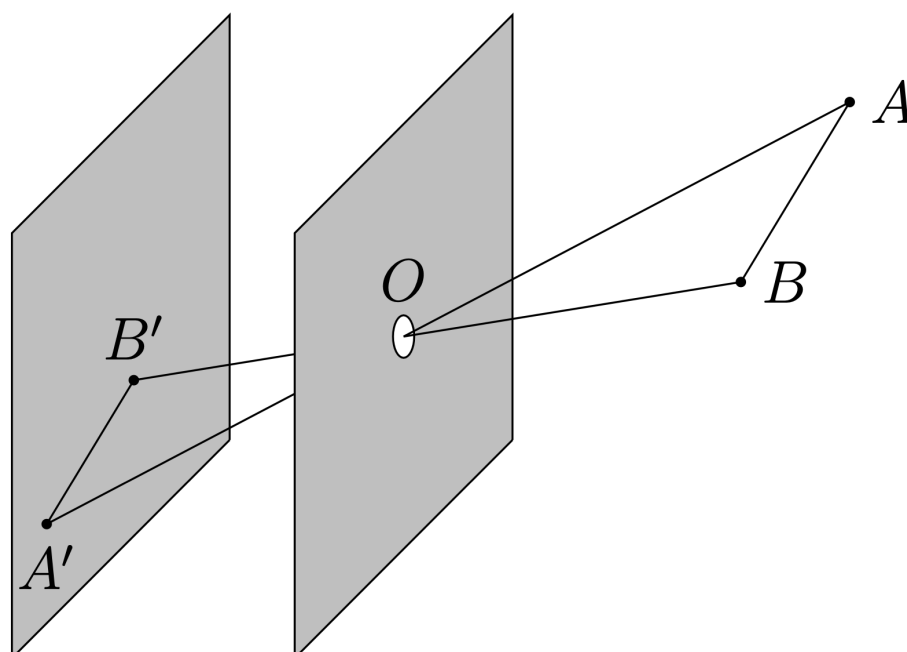
Ответ:

$$l \approx 90 \text{ м}$$

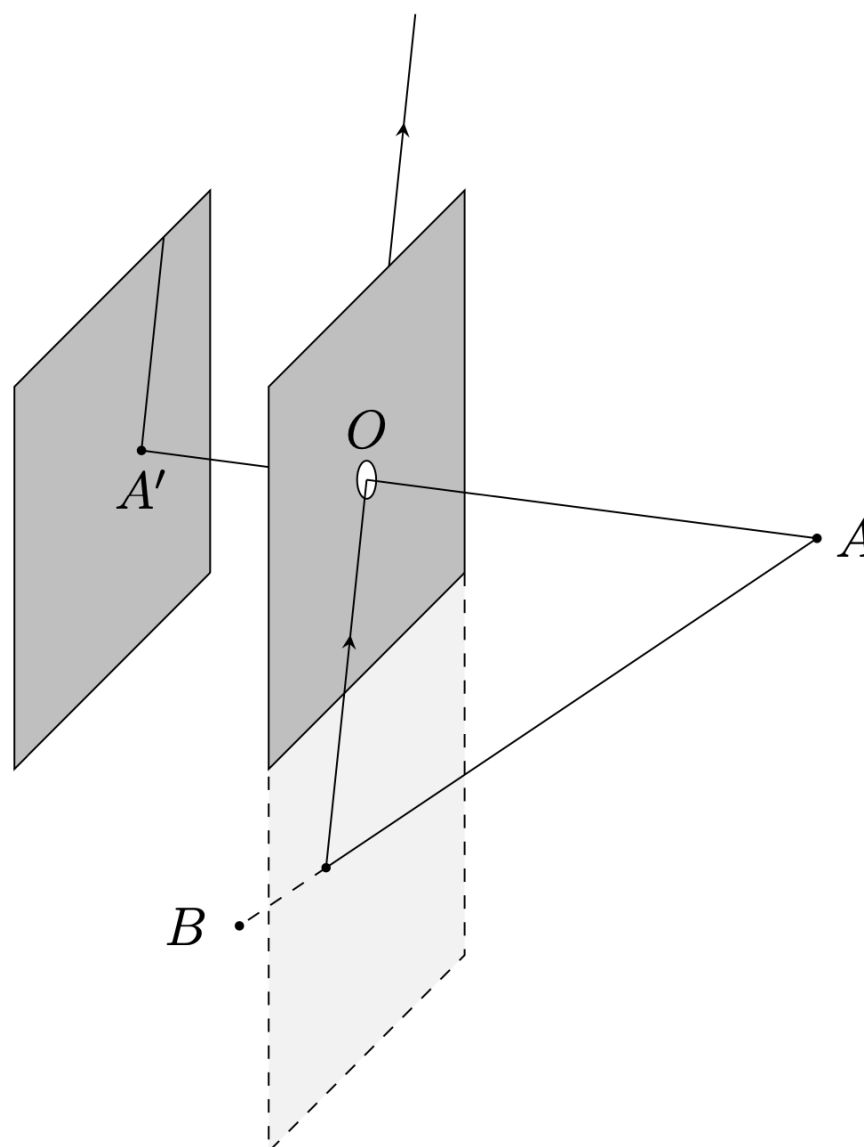
C1 0.20 Докажите, что изображение отрезка на фотографии будет отрезком или лучом.

Заметим, что A, B, O и изображение отрезка лежат в одной плоскости, изображение AB полностью лежит на прямой – пересечении этой плоскости с плоскостью экрана.

Если A и B находятся перед передней плоскостью камеры, то изображение будет отрезком.

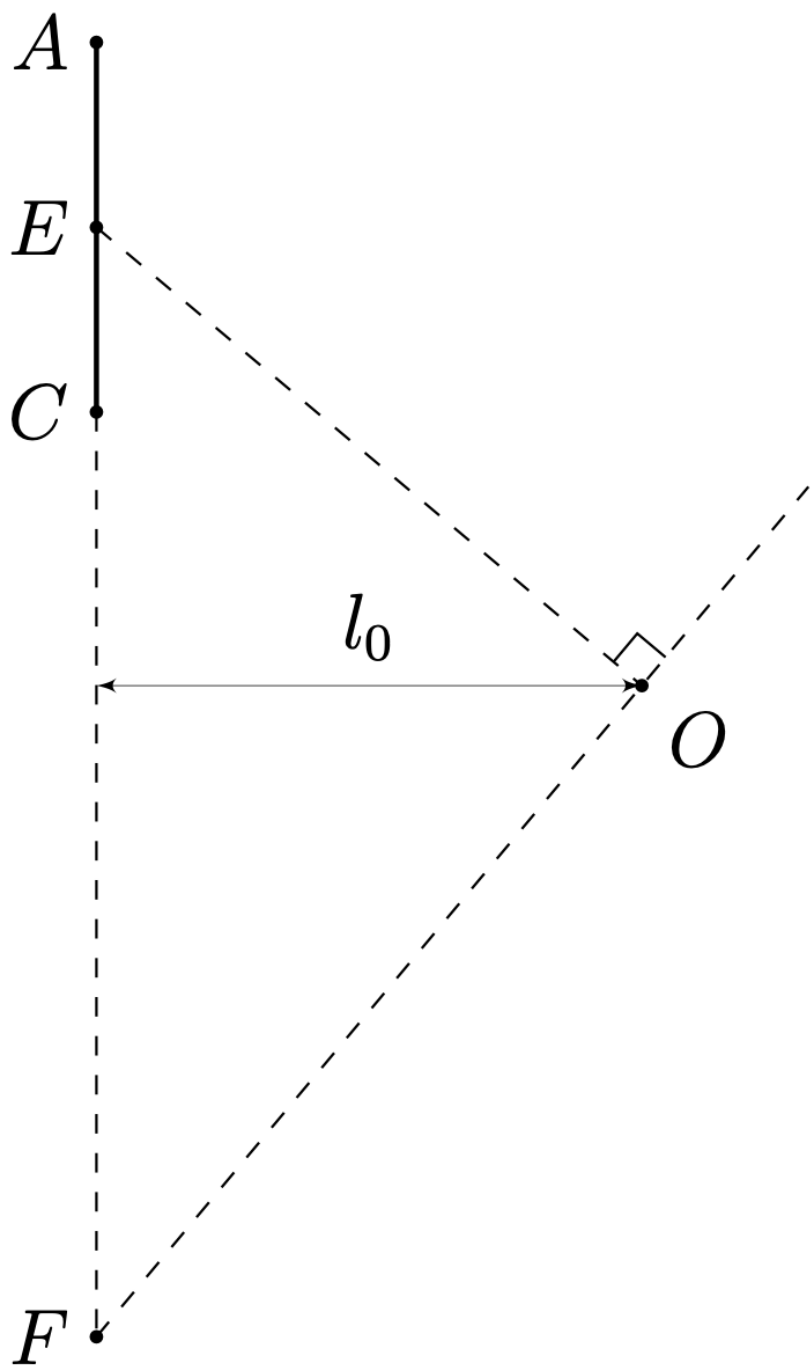


Если A и B находятся с разных сторон от передней плоскости камеры, то изображение будет лучом.



C2 0.50 При каком соотношении между l_0 и a на экране в любой момент времени будут изображены все точки флага, если пренебречь конечностью размеров экрана? Во всех последующих пунктах данной части задачи считайте полученное условие выполненным.

Какой-то части флага не будет на фотографии, если она лежит с обратной стороны от передней плоскости камеры. Рассмотрим происходящее в проекции на плоскость перпендикулярную плоскости флага и передней плоскости камеры.



Чтобы флаг было видно всегда необходимо, чтобы при любом положении точки E (E – центр флага) выполнялось: $EC < EF$. Длина EC постоянна:

$$EC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

EF – гипотенуза прямоугольного треугольника EOF , поэтому $EF = 2l_m$, где l_m – длина медианы этого треугольника из вершины O . Высота EOF из вершины O равна l_0 , и она не может быть больше l_m :

$$l_0 \leq l_m = \frac{EF}{2}.$$

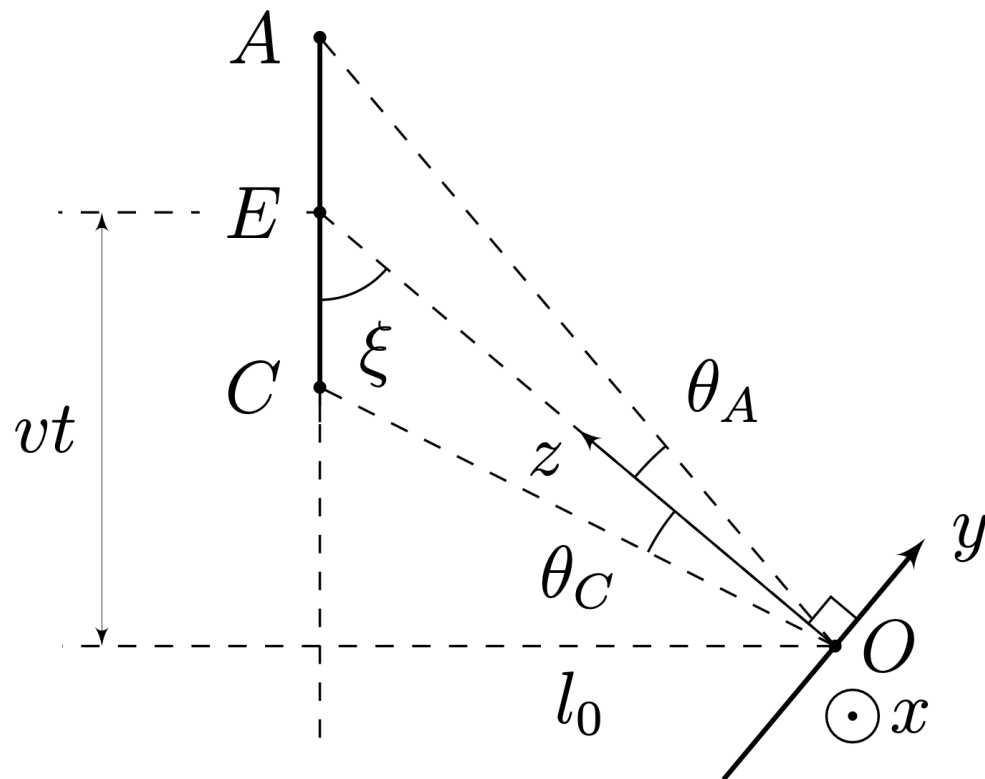
То есть $EF \geq 2l_0$ и равенство выполняется, когда рассматриваемый треугольник равнобедренный. Таким образом, чтобы флаг всегда было видно, необходимо:

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < 2l_0.$$

Ответ:

$$a < 2\sqrt{2}l_0.$$

СЗ 1.40 Найдите координаты (X, Y) вершин флага на фотографии в зависимости от времени.



Расстояние от начала координат XY до изображения точки определяется тангенсом угла между осью камеры и направлением на эту точку (обозначим для точек A, B, C и D эти углы $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ и θ_D соответственно). Можем найти координаты x, y и z этих точек и получить:

$$\tan \theta_B = \tan \theta_D = \frac{|x_B|}{z_B} = \frac{a/\sqrt{2}}{\sqrt{l_0^2 + v^2 t^2}} = \frac{a}{\sqrt{2(l_0^2 + v^2 t^2)}};$$

$$\tan \theta_A = \frac{|y_A|}{z_A} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \xi}{\sqrt{l_0^2 + v^2 t^2} + \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \xi};$$

$$\tan \theta_C = \frac{|y_C|}{z_C} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \xi}{\sqrt{l_0^2 + v^2 t^2} - \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \xi}.$$

При этом можем выразить ξ через данные величины:

$$\cos \xi = \frac{vt}{\sqrt{l_0^2 + v^2 t^2}} \quad \text{и} \quad \sin \xi = \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + v^2 t^2}}.$$

Получим итоговый ответ:

Ответ:

$$X_A = 0 \quad Y_A = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} l_0 L}{l_0^2 + v^2 t^2 + \frac{a}{\sqrt{2}} vt}$$

$$X_B = -\frac{aL}{\sqrt{2(l_0^2 + v^2 t^2)}} \quad Y_B = 0$$

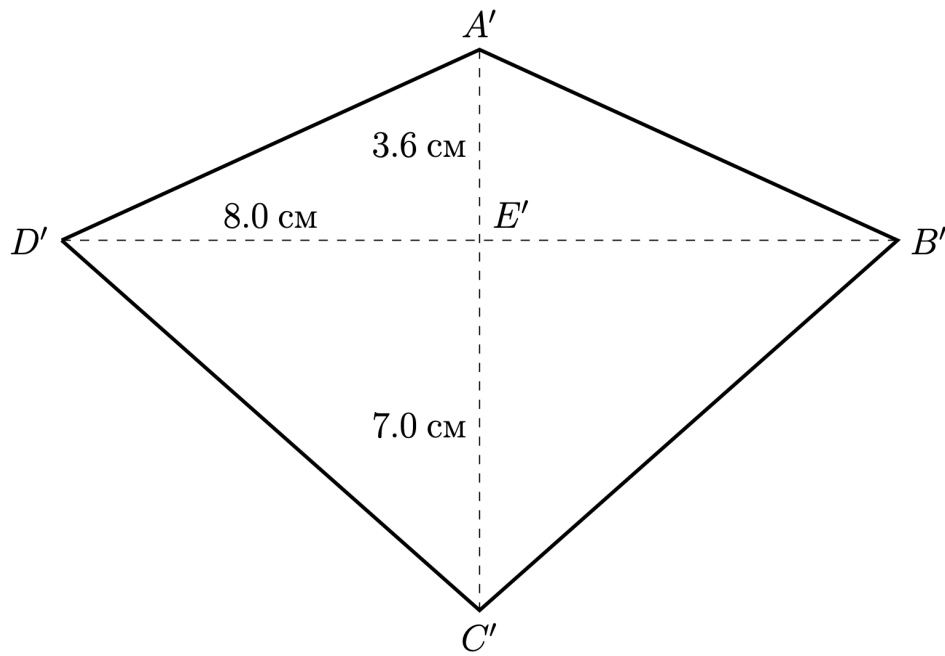
$$X_C = 0 \quad Y_C = -\frac{\frac{a}{\sqrt{2}} l_0 L}{l_0^2 + v^2 t^2 - \frac{a}{\sqrt{2}} vt}$$

$$X_D = \frac{aL}{\sqrt{2(l_0^2 + v^2 t^2)}} \quad Y_D = 0$$

С4^{1.20}

На рисунке изображена фотография флага в неизвестном масштабе. Определите, в какой момент времени τ была сделана фотография.

По фотографии можем в неизвестном масштабе найти координаты изображений вершин, то есть мы можем с точностью до неизвестного множителя найти тангенсы углов $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ и θ_D .



Для удобства в промежуточных вычислениях будем использовать ξ .

$$\tan \theta_B = \frac{a/\sqrt{2}}{\sqrt{l_0^2 + v^2 t^2}} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \xi}{l_0} = 8k$$

$$\tan \theta_A = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \xi}{\frac{l_0}{\sin \xi} + \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \xi} = 3.6k$$

$$\tan \theta_C = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \sin \xi}{\frac{l_0}{\sin \xi} - \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \xi} = 7k$$

Поделим $\tan \theta_B$ на $\tan \theta_A$ и $\tan \theta_C$.

$$\frac{8}{3.6} = \frac{1}{\sin \xi} + \frac{a}{\sqrt{2} l_0} \cos \xi$$

$$\frac{8}{7} = \frac{1}{\sin \xi} - \frac{a}{\sqrt{2} l_0} \cos \xi$$

Сложив, получим значение ξ .

$$\frac{8}{7} + \frac{8}{3.6} = \frac{2}{\sin \xi}$$

$$\sin \xi = \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + v^2 t^2}} = 0.594$$

$$vt = 4.06 \text{ м}$$

Получаем ответ:

Ответ:

$$t = 4.06 \text{ с}$$

D1^{0.10}

Чему равен угол θ ? Ответ выразите через R и h .

Ответ:

$$\theta = \arccos \frac{R}{R + h}$$

D2^{0.40}

Определите координаты x , y и z точки горизонта, соответствующей углу φ . Ответ выразите через θ , R , φ .

Координата y точек горизонта не зависит от φ и она равна:

$$y = -\frac{R}{\cos \theta} + R \cos \theta.$$

Координаты x и z равны:

$$x = R \sin \theta \sin \varphi;$$

$$z = R \sin \theta \cos \varphi.$$

Ответ:

$$x = R \sin \theta \sin \varphi$$

$$y = -\frac{R}{\cos \theta} + R \cos \theta$$

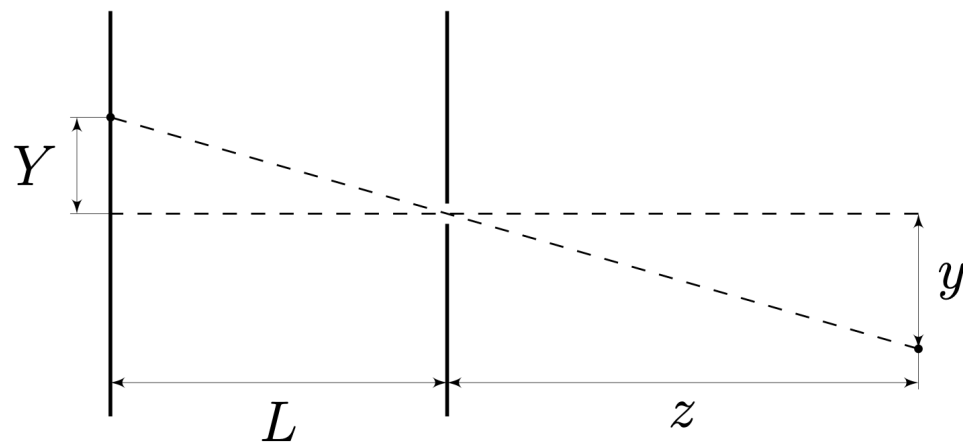
$$z = R \sin \theta \cos \varphi$$

D3^{0.20}

Докажите, что координаты X, Y связаны с координатами x, y и z соотношениями:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{L}{z}.$$

Рассмотрим происходящее в проекции на yz .



Из подобия треугольников получаем:

$$\frac{Y}{y} = \frac{L}{z}.$$

Аналогично в проекции на xz получим:

$$\frac{X}{x} = \frac{L}{z}.$$

D4^{0.70}

Покажите, что изображение горизонта на экране описывается следующим уравнением:

$$\frac{Y^2}{A^2} - \frac{X^2}{B^2} = 1,$$

где $A, B > 0$. Выразите A и B через L и θ .

Примечание: следующее выражение может оказаться полезным:

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \tan^2 \varphi.$$

Используя полученные ранее результаты, выразим X и Y через L, θ и φ .

$$X = \frac{xL}{z} = L \tan \varphi$$

$$Y = \frac{yL}{z} = L \frac{-\frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta}{\sin \theta \cos \varphi} = -\frac{L \tan \theta}{\cos \varphi}$$

Возведём Y в квадрат и выразим через X :

$$Y^2 = \frac{L^2 \tan^2 \theta}{\cos^2 \varphi} = L^2 \tan^2 \theta + X^2 \tan^2 \theta.$$

$$\frac{Y^2}{(L \tan \theta)^2} - \frac{X^2}{L^2} = 1$$

Ответ:

$$A = L \tan \theta$$
$$B = L$$

D5 1.00

Определите, с какой высоты h была сделана фотография.

Вспользуемся формулой из прошлого пункта задачи. Подставим в неё две точки из графика: $(0, 7k)$ и $(40k, 10k)$, где k – неизвестный множитель, отвечающий за масштаб.

$$\frac{(7k)^2}{A^2} = 1 = \frac{(10k)^2}{A^2} - \frac{(40k)^2}{B^2}$$
$$\tan^2 \theta = \frac{A^2}{B^2} = \frac{10^2 - 7^2}{40^2}$$

Найдём θ и подставим в выражение через h и R .

$$\theta = 10.1^\circ$$
$$\frac{h}{R} = \frac{1}{\cos \theta} - 1$$

Ответ:

$$h = 100 \text{ км}$$

D6 0.50

Определите угол θ' . Ответ выразите через R , n_0 и h .

Атмосфера Земли сферически симметрична, поэтому при движении луча в атмосфере сохраняется выражение $n(r) \cdot r \cdot \cos \theta(r)$, где r – расстояние до центра земли, $n(r)$ – показатель преломления воздуха в этой точке, $\theta(r)$ – угол направления луча с горизонтом. Подставим значения у поверхности земли и на высоте h .

$$n_0 R = (R + h) \cos \theta'$$

Ответ:

$$\theta' = \arccos \frac{n_0 R}{R + h}$$

D7 0.60

С учётом малости $n_0 - 1$ определите, на какую величину Δh отличается реальная высота фотографирования от полученной вами в пункте D5. Выразите ответ через $n_0 - 1$, R и h , рассчитайте его численное значение.

Запишем новое выражение для θ и приравняем его к старому, так как угол θ определяется из графика и его значение при расчётах будет одно.

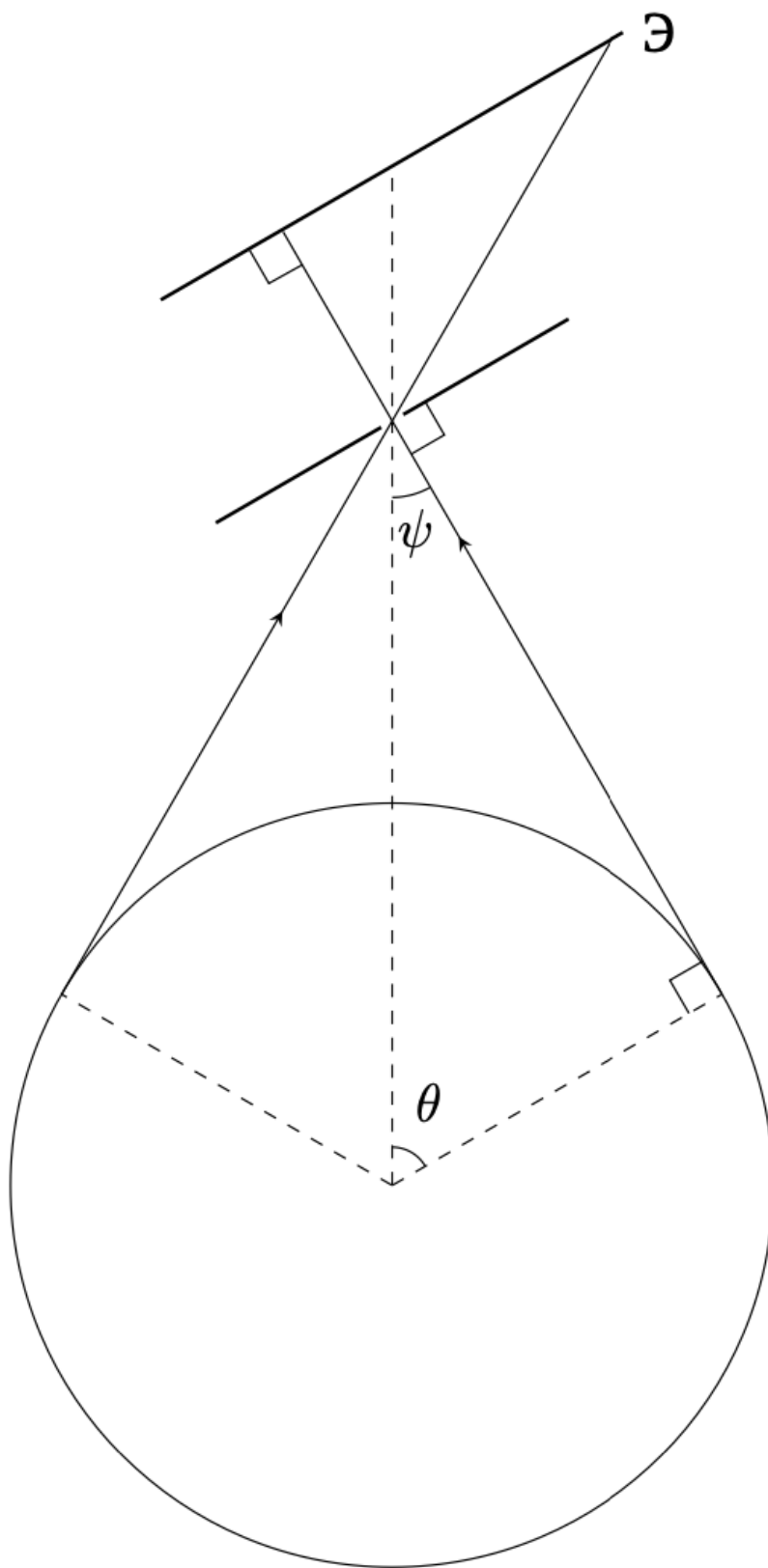
$$\frac{n_0 R}{R + h + \Delta h} = \frac{R}{R + h}$$
$$(R + h)(n_0 - 1) = \Delta h$$

Ответ:

$$\Delta h = (R + h)(n_0 - 1) = 1.77 \text{ км}$$

E1 0.30

Определите h_{cr} , начиная с которого при подъёме горизонт видно полностью.



Горизонт видно полностью, когда весь конус лучей от горизонта лежит с одной стороны от передней плоскости камеры. Это условие выполнено при $2\psi < 90^\circ$. При этом $\theta = 90^\circ - \psi$, поэтому условие на θ :

$$\theta > 45^\circ.$$

Это равносильно следующему неравенству:

$$R + h > \sqrt{2}R.$$

Ответ:

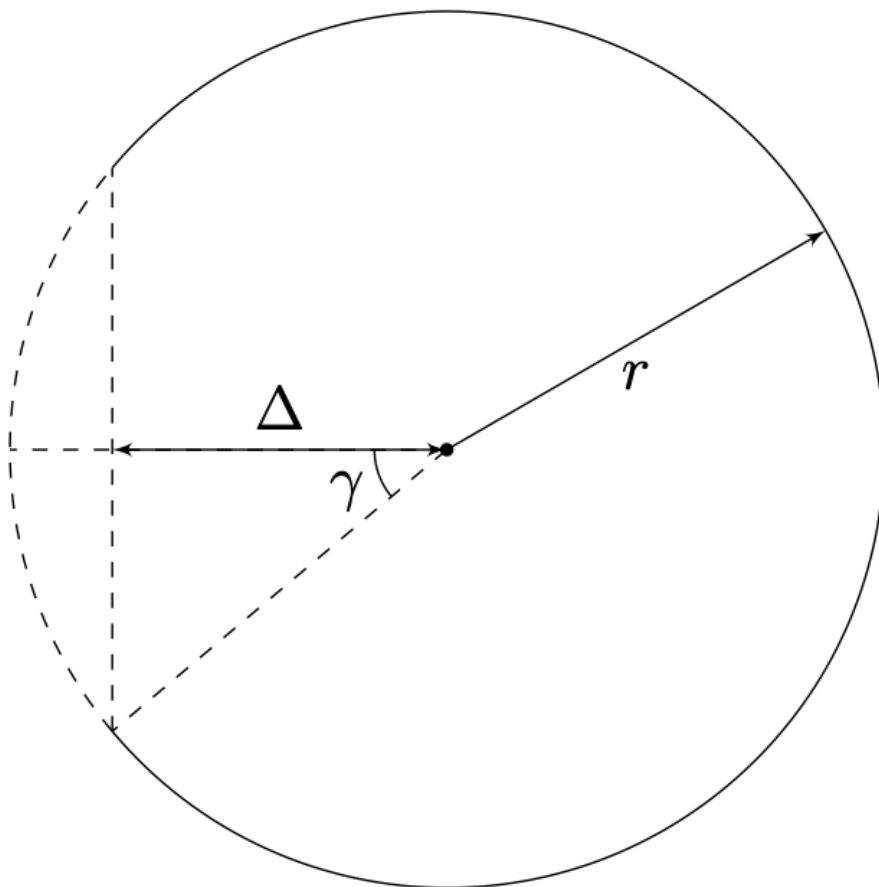
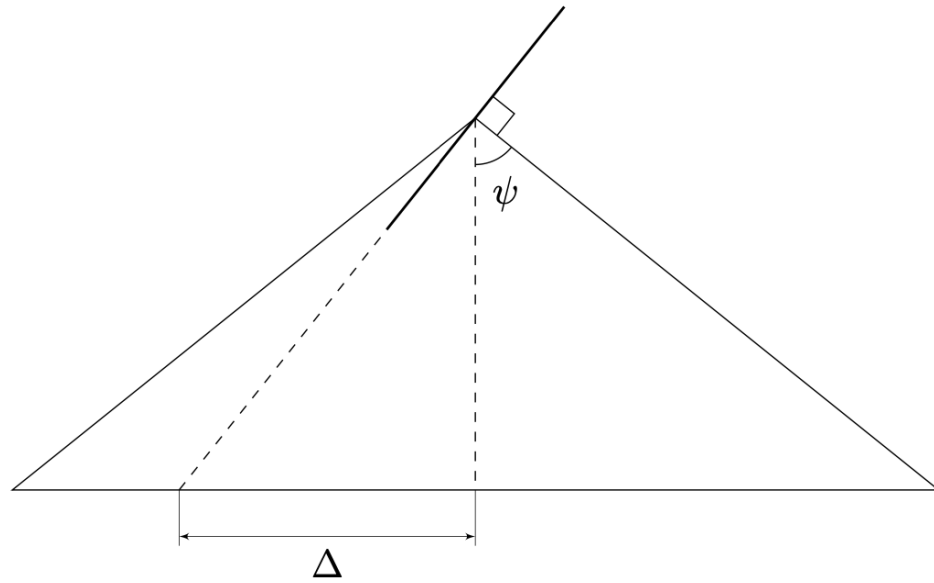
$$h_{cr} = (\sqrt{2} - 1) R$$

E2^{1.10}

Определите зависимость видимой части горизонта η от величины h/R . Постройте график этой зависимости.

Примечание: при промежуточных вычислениях может быть полезен угол θ , показанный на рисунке.

Рассмотрим сечение окружности горизонта передней плоскостью камеры, когда горизонт видно не полностью.



Заметим, что искомая величина:

$$\eta = \frac{2\pi - 2\gamma}{2\pi} = 1 - \frac{\gamma}{\pi}.$$

Высота треугольника на первой фотографии равна $\frac{R}{\cos \theta} - R \cos \theta$. Выразим Δ через R, θ .

$$\Delta = \left(\frac{R}{\cos \theta} - R \cos \theta \right) \tan(90^\circ - \psi) = \left(\frac{R}{\cos \theta} - R \cos \theta \right) \tan \theta = R \cos \theta \tan^3 \theta$$

Выразим γ :

$$\gamma = \arccos \frac{\Delta}{r} = \arccos \frac{R \cos \theta \tan^3 \theta}{R \sin \theta} = \arccos (\tan^2 \theta).$$

Видимая часть горизонта в этом случае:

$$\eta = 1 - \frac{\arccos (\tan^2 \theta)}{\pi} = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \left(\left(1 + \frac{h}{R} \right)^2 - 1 \right).$$

Заметим, что эта формула имеет смысл при $\theta < 45^\circ$, то есть при $h < h_{cr}$. При $h \geq h_{cr}$ горизонт виден полностью, поэтому $\eta = 1$.

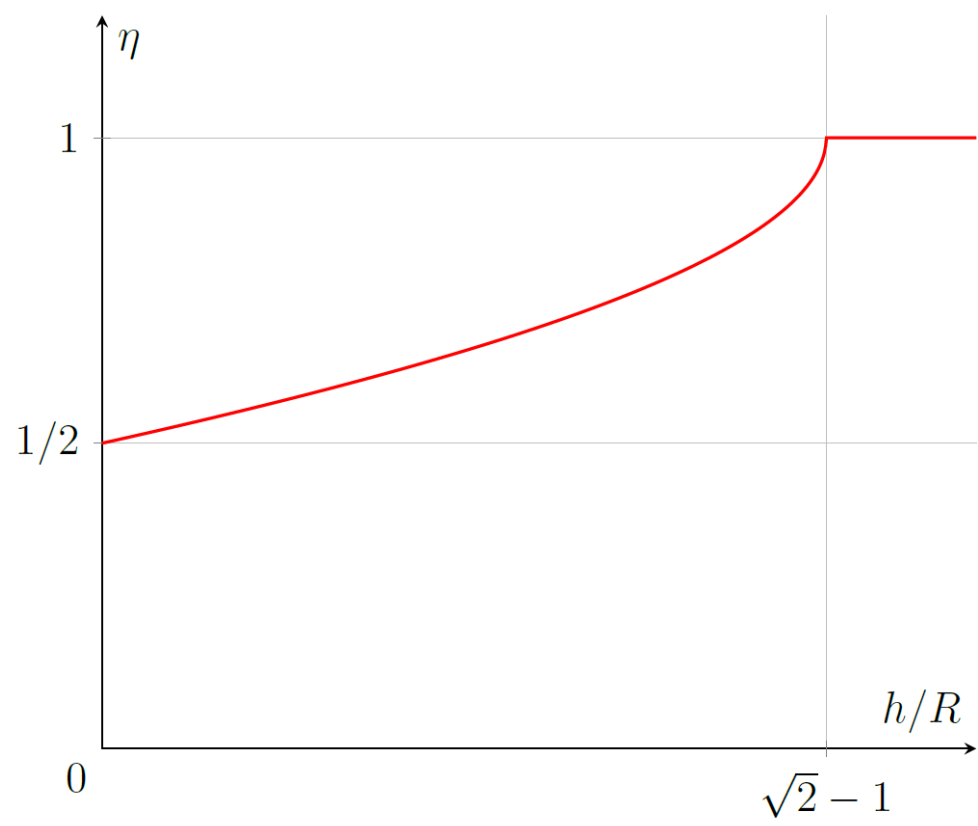
Ответ: При $\frac{h}{R} < \sqrt{2} - 1$:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \left(\left(1 + \frac{h}{R} \right)^2 - 1 \right).$$

При $\frac{h}{R} \geq \sqrt{2} - 1$:

$$\eta = 1.$$

Ответ:

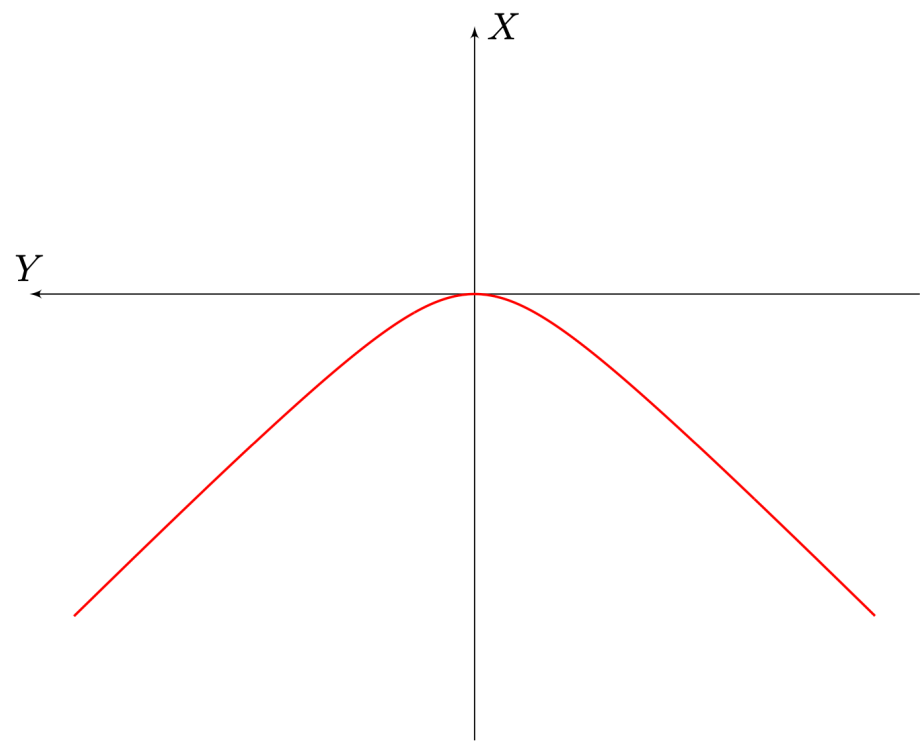


ЕЗ^{0.60} Нарисуйте качественные изображения горизонта при $h < h_{cr}$, $h = h_{cr}$ и $h > h_{cr}$. Определите типы кривых, получающихся при фотографировании с разных высот.

Заметим, что изображение - коническое сечение. В обозначениях условия $\alpha = \psi = 90^\circ - \theta$. В таком случае изображение будет эллипсом при $\theta > 90^\circ - \theta$, параболой при $\theta = 90^\circ - \theta$ и гиперболой при $\theta < 90^\circ - \theta$. Подставляя h , получим ответ.

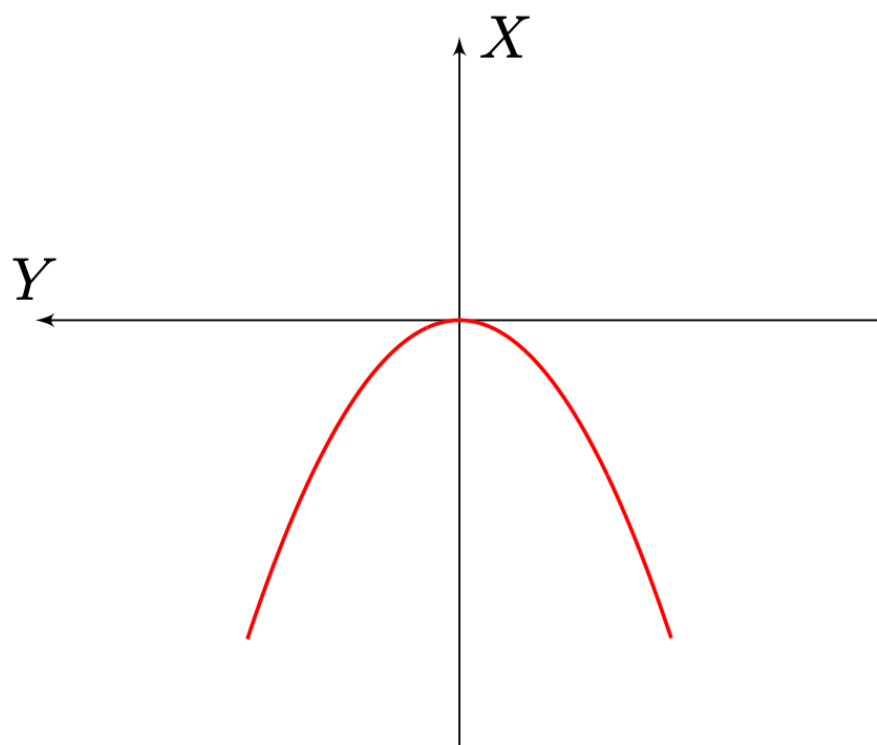
Ответ: При $h < h_{cr}$ изображение – гипербола.

Ответ:



Ответ: При $h = h_{cr}$ изображение – парабола.

Ответ:



Ответ: При $h > h_{cr}$ изображение – эллипс.

Ответ:

