



Как известно, распространение электромагнитных волн описывается уравнениями Максвелла. Простейшими их решениями в вакууме являются плоские волны. Однако плоские волны неограниченны в пространстве, и поэтому физически не реализуются. В этой задаче будут рассматриваться симметричные относительно оси пучки, в которых интенсивность спадает с расстоянием до оси пучка r по характерному закону $I \sim \exp(-2r^2/w^2)$, где w – характерная ширина пучка. Такие пучки называют *гауссовыми пучками*. В таком пучке поле достаточно быстро убывает с расстоянием до оси, так что его ширину можно считать конечной. В случае, если ширина пучка много больше длины волны, удастся получить аналитическое решение для зависимости поля волны в пучке от координат. Оказывается, что если в одном из сечений пучка зависимость интенсивности имеет гауссов вид, то и во всех других сечениях она также гауссова.

Из уравнений Максвелла следует, что каждая компонента электрического и магнитного полей удовлетворяет волновому уравнению, например для E_x оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Другие компоненты в этой задаче рассматривать не будем. Во всей задаче мы будем рассматривать только строго монохроматические волны с циклической частотой ω , которой в вакууме отвечает длина волны λ и волновое число $k = 2\pi/\lambda$. Удобно рассматривать комплексные решения волнового уравнения вида

$$\hat{E}_x(x, y, z, t) = v(x, y, z) \exp(i\omega t),$$

где v – комплексная амплитуда волны в рассматриваемой точке.

Как и всегда, наблюдаемое поле связано с комплексным решением как:

$$E_x(x, y, z, t) = \text{Re}\{\hat{E}_x(x, y, z, t)\}.$$

Если $\hat{E}_x$ удовлетворяет волновому уравнению, то в силу линейности E_x также удовлетворяет волновому уравнению.

Часть А. Дифракция гауссовых пучков (2.0 балла)

В этой части получим различные оценки для гауссова пучка с помощью элементарных методов из теории дифракции. Будем считать, что пучок распространяется вдоль оси z , колебания поля в плоскости $z = 0$ происходят в фазе, а зависимость амплитуды от расстояния $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ до оси симметрии системы имеет вид

$$v(x, y, 0) = E_0 \exp(-r^2/w_0^2),$$

где E_0 – вещественная постоянная. Будем искать распределение амплитуды волны по экрану, расположенному в плоскости $z = L$.

A1 0.30

На очень больших расстояниях L оцените по порядку величины размер пятна D на экране. Выразите ответ через λ , w_0 , L .

Для вычисления дифракционной картины будем использовать интеграл Кирхгофа, который выражает комплексную амплитуду волны в любой точке полупространства $z > 0$ в виде интеграла по поверхности $z = 0$:

$$v(x, y, z) = -\frac{1}{i\lambda} \int dx' dy' \frac{v(x', y', 0)}{s} e^{-iks},$$

где s – расстояние от точки плоскости до точки наблюдения. Даже этот интеграл нельзя вычислить точно, поэтому вам потребуется использовать приближения, отвечающие случаям дифракции Фраунгофера и Френеля. Положение точки на экране будем характеризовать расстоянием $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ до оси симметрии системы, причем будем считать $r \ll L$.

Сначала рассмотрим случай дифракции Фраунгофера. В этом случае расстояние от плоскости до точки наблюдения настолько велико, что можно считать параллельными все лучи, идущие к точке наблюдения.

A2 0.20

При каком ограничении на L применима теория дифракции Фраунгофера? Выразите ответ через L , w_0 , λ .

A3 0.80

Запишите в этом случае выражение для амплитуды электрического поля в виде интеграла по $dx' dy'$. Найдите выражение для амплитуды поля на экране в зависимости от расстояния до оси симметрии r . Также в ответ могут входить E_0 , w_0 , k .

Вам может потребоваться интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2+ibx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/4a}.$$

A4 0.70

Теперь рассмотрим случай дифракции Френеля. При этом расстояние L произвольно, однако углы между лучами, идущими к точке наблюдения, и осью z можно считать малыми. Найдите $A(z) = v(0, 0, z) \exp(ikz)$ – комплексную амплитуду на оси Oz без учёта фазы плоской волны. Ответ выразите через E_0 , w_0 , k , z .

Часть В. Гауссов пучок как решение волнового уравнения (2.4 балла)

Поскольку гауссов пучок распространяется вдоль оси z , его амплитуда содержит быстро меняющийся множитель e^{-ikz} , будем искать поле в виде

$$\hat{E}_x(x, y, z, t) = u(x, y, z) \exp(-ikz) \exp(i\omega t), \quad (2)$$

причём $\omega = ck$, а в плоскости $z = 0$

$$u(r, 0) = E_0 \exp(-r^2/w_0^2).$$

B1 0.30

Подставьте (2) в (1) и получите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $u(x, y, z)$.

Предположим, что $u(x, y, z)$ – функция, мало меняющаяся вдоль Oz на расстоянии $\sim \lambda$. Это означает, что (2) описывает плоскую волну, модулированную функцией, медленно меняющейся на расстояниях порядка длины волны. Математически это условие записывается в виде:

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial u}{\partial z} \right|. \quad (\#)$$

В этом приближении уравнение пункта В1 принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Как и раньше $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Гауссову пучку отвечает решение уравнения (3) вида:

$$u(r, z) = A(z) \exp\left(-\frac{ikr^2}{2q(z)}\right), \quad (4)$$

где $A(z)$, $q(z)$ – комплекснозначные функции, причем функция $A(z)$ – комплексная амплитуда волны на оси симметрии, найденная в предыдущей части. Далее в этой части вам предстоит определить функцию $q(z)$.

В2^{0.50} Покажите, что сумма вторых частных производных u по «поперечным» координатам x, y представима в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = [-2i\chi(z) - \chi^2(z) \cdot r^2] \cdot u.$$

Выразите $\chi(z)$ через $q(z)$, k .

В3^{0.30} Покажите, что частная производная u по z представима в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left[\frac{A'(z)}{A(z)} + i\zeta(z) \cdot r^2 \right] \cdot u.$$

Выразите $\zeta(z)$ через $q(z)$, $q'(z)$, k .

Подстановка результатов пунктов В1, В2 в (3) и сокращение на u приводит к соотношению:

$$-2ik \frac{A'(z)}{A(z)} - 2i\chi(z) + [2k\zeta(z) - \chi^2(z)] \cdot r^2 = 0. \quad (5)$$

Необходимым условием для его выполнения является независимость левой части от r , то есть

$$2k\zeta(z) - \chi^2(z) = 0.$$

В4^{0.40} Получите дифференциальное уравнение на $q(z)$. Решите его с начальным условием

$$q(0) = iz_0,$$

где z_0 – действительная величина, $z_0 > 0$. Выразите z_0 через w_0 , k .

Отметим, что приближение (#) будет верно при условии $kz_0 \gg 1$, что будем считать выполненным везде далее.

Обозначим

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{2}{kw^2(z)},$$

где $R(z)$, $w(z)$ – вещественнозначные функции.

В5^{0.20} Выразите $R(z)$ и $w(z)$ через k , z , z_0 .

В6^{0.40} Проверьте, что найденная в части А функция $A(z)$ действительно удовлетворяет уравнению (5), то есть при ее подстановке слагаемые, не содержащие r^2 , обращаются в 0.

В7^{0.30} Представим функцию $A(z)$ в виде

$$A(z) = A_0(z)e^{i\psi(z)}$$

с вещественными A_0 и ψ . Выразите A_0 и ψ через z , z_0 , E_0 .

Часть С. Характеристики гауссова пучка (4.0 балла)

В рассматриваемом приближении интенсивность света в произвольной точке равна

$$I = \beta \langle E^2 \rangle,$$

где β – константа, $\langle E^2 \rangle$ – средний по времени квадрат напряжённости поля в этой точке. Также в рассматриваемом приближении энергия поля переносится волной вдоль оси Oz , передача энергии в перпендикулярном направлении отсутствует.

С1^{0.50} Найдите распределение интенсивности в пучке $I(r, z)$. Ответ выразите через β , $A_0(z)$, $w(z)$. Изобразите характерный график распределения интенсивности в радиальном направлении при фиксированном z .

С2^{0.40} Найдите полную мощность излучения P , передаваемого пучком через плоскость $z = \text{const}$. Ответ выразите через β , E_0 , k , z_0 , z .

Границей пучка будем называть точки, в которых интенсивность в e^2 раз меньше, чем в точке с той же координатой z и лежащей на оси пучка. Более формально: если рассмотреть точку с координатой z по оси Oz и удалённую на расстояние r от нее, то она будет лежат на границе, если:

$$\frac{I(r, z)}{I(0, z)} = \frac{1}{e^2}.$$

В силу осевой симметрии решения любая плоскость $z = \text{const}$ пересекает границу по окружности. Диаметр этой окружности $d(z)$ будем называть **шириной** пучка.

С3^{0.40} Выразите ширину пучка $d(z)$ через $w(z)$. Постройте качественный график зависимости $d(z)$.

C4^{0.10} Найдите минимальную ширину пучка $d_{\text{п}}$. Ответ выразите через z_0, k . Величина $d_{\text{п}}$ называется **шириной перетяжки**. Плоскость, перпендикулярная Oz , в которой ширина пучка равна ширине перетяжки, называется **плоскостью перетяжки**.

Волновым фронтом называется поверхность постоянной фазы волны. Через любую любую точку пространства проходит единственный волновой фронт.

C5^{0.40} Получите уравнение, определяющее форму волнового фронта гауссова пучка, проходящего через заданную точку $(0, z_1)$. В уравнении могут присутствовать $R(z), \psi(z), k, z, z_1$.

Как было указано ранее, $kz_0 \gg 1$. С учётом этого можно считать функции $R(z)$ и $\psi(z)$ постоянными при малых удалениях от оси Oz . В этом приближении форма волнового фронта гауссова пучка совпадает с формой фронта сферической волны, наблюдаемого на некотором расстоянии $\rho(z)$ от источника. Естественно, $\rho(z_1)$ является радиусом кривизны волнового фронта гауссова пучка в точке $(0, 0, z_1)$.

C6^{0.50} Найдите радиус кривизны фронта $\rho(z_1)$. Ответ выразите через $R(z)$. Постройте график зависимости $\rho(z_1)$, указав на нём характерные особенности и их координаты.

C7^{0.70} Пусть в некоторой точке $z = z_a$ параметры гауссова пучка $R(z_a) = R_a, w(z_a) = w_a$. Найдите z_a и диаметр перетяжки пучка $d_{\text{п}}$. Ответ выразите через R_a, w_a, k .

C8^{1.00} Пусть гауссов пучок с длиной волны $\lambda_0 = 10.6$ мкм имеет ширину $d_1 = 3.398$ мм и $d_2 = 6.760$ мм в двух точках, расстояние между которыми $L = 10$ см. **Численно** рассчитайте ширину перетяжки пучка $d_{\text{п}}$.

Часть D. Гауссовы пучки в линзах (1.6 балла)

Рассмотрим для начала преобразование плоской волны тонкой линзой.

Пусть плоскость тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием f перпендикулярна оси Oz , центр линзы находится в точке $(0, 0, z_{\text{л}})$. На линзу падает плоская волна, одна из компонент поля в которой:

$$\hat{E}_{\text{п}x}(x, y, z, t) = \hat{E}_{0x} \exp(i(\omega t - kz)).$$

Известно, что после прохождения линзы сразу за ней напряженность поля оказывается равной:

$$\hat{E}'_{\text{п}x}(x, y, z_{\text{л}}, t) = \hat{E}_{\text{п}x}(x, y, z_{\text{л}}, t) \cdot \hat{\tau}(x, y),$$

здесь $\hat{\tau}(x, y)$ – коэффициент пропускания линзы. Известно, что для линзы он имеет вид

$$\hat{\tau}(x, y) = \exp(i\eta(x^2 + y^2)),$$

$\eta = \text{const}$.

D1^{0.70} Известно, что линза изменяет фазу падающей волны таким образом, что все лучи приходят в фокус с одинаковой фазой. Используя этот факт, выразите коэффициент η через k, f .

Для гауссовых пучков приближённо можно применить тот же закон преобразования.

D2^{0.50} Пусть на тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием f падает гауссов пучок, распространяющийся вдоль Oz . Плоскость линзы перпендикулярна оси Oz . Непосредственно перед линзой параметры пучка $R(z_{\text{л}}) = R_1, w(z_{\text{л}}) = w_1$. Известно, что после линзы он также останется гауссовым. Найдите параметры пучка R_2, w_2 непосредственно после прохождения через линзу. Диаметр линзы много больше w_1 .

D3^{0.40} Найдите условие, связывающее R_1, w_1 и f , при котором гауссов пучок сфокусируется за линзой, то есть его плоскость перетяжки будет расположена после линзы.