

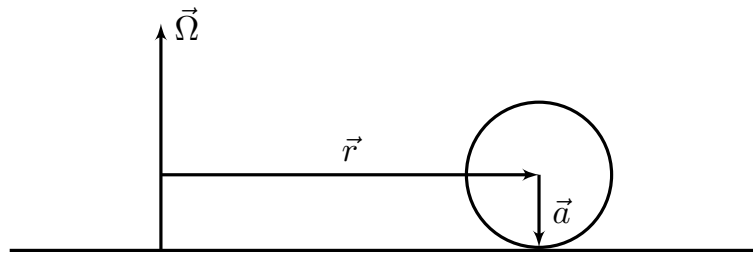
Road to IPhO

Шары Ирншоу

В 1844 году Ирншоу описал в своём учебнике по механике интересный эффект: шар, помещённый на вращающийся горизонтальный стол, может двигаться по окружностям, оси которых не обязаны совпадать с осью вращения стола. В 1940 году Эйнштейн говорил, что этот факт недостаточно интересен, чтобы тратить на него время. В этой задаче мы постараемся угодить Альберту, решив задачу для более сложных вариантов положения и формы стола.

Часть А. Прав ли Ирншоу? (2.2 балла)

Исследуем движение без проскальзывания шара радиусом a и массой m на горизонтальном вращающемся с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ столе.



Обозначим $\vec{r}$ радиус-вектор от оси вращения стола до центра шара, идущий параллельно поверхности стола, $\vec{a}$ – вектор от центра шара до точки касания со столом, $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения шара, $\vec{g}$ – ускорение свободного падения, $\vec{F}$ и $\vec{N}$ – силы трения и нормальной реакции опоры, действующие на шар, соответственно. Момент инерции шара $I = \beta m a^2$, где $\beta = 2/5$.

A1 Выразите $\ddot{\vec{r}}$ и $\dot{\vec{\omega}}$ через $\vec{F}$, m , β , $\vec{a}$.

0.5

A2 Запишите условие кинематической связи. Выразите ответ через $\dot{\vec{r}}$, $\vec{a}$, $\vec{r}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$.

0.3

A3 Выразите $\ddot{\vec{r}}$ через β , $\dot{\vec{r}}$ и $\vec{\Omega}$.

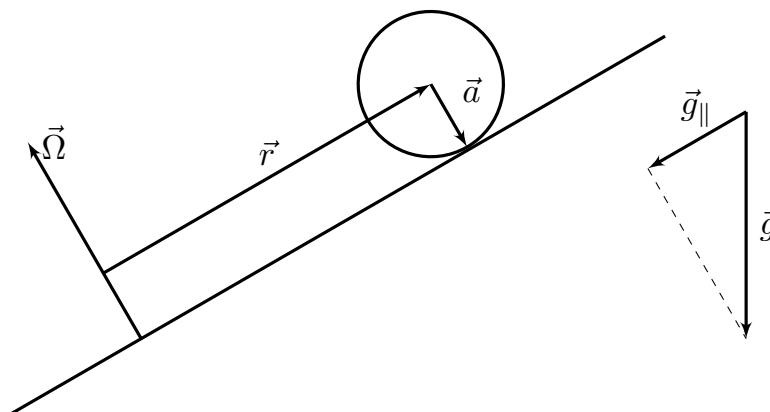
0.7

A4 Пусть изначально положение и скорость шара были $\vec{r}_0$ и $\vec{v}_0$ соответственно. Определите, как $\dot{\vec{r}}$ зависит от $\vec{r}$ при дальнейшем движении. Качественно изобразите траекторию движения центра шара в этом случае и укажите характерные размеры и координаты.

0.7

Часть В. Наклонный стол (1.7 балла)

Теперь стол наклонён и есть отличная от нуля проекция $\vec{g}_{\parallel}$ ускорения свободного падения на него. Остальные обозначения совпадают с частью А.



Road to IPhO

B1 Выразите $\ddot{\vec{r}}$ через $\vec{g}_{\parallel}$, β , $\dot{\vec{r}}$ и $\vec{\Omega}$.

0.3

B2 Обозначим

1.4

$$\vec{u} = \frac{[\vec{\Omega} \times \vec{g}_{\parallel}]}{\Omega^2}.$$

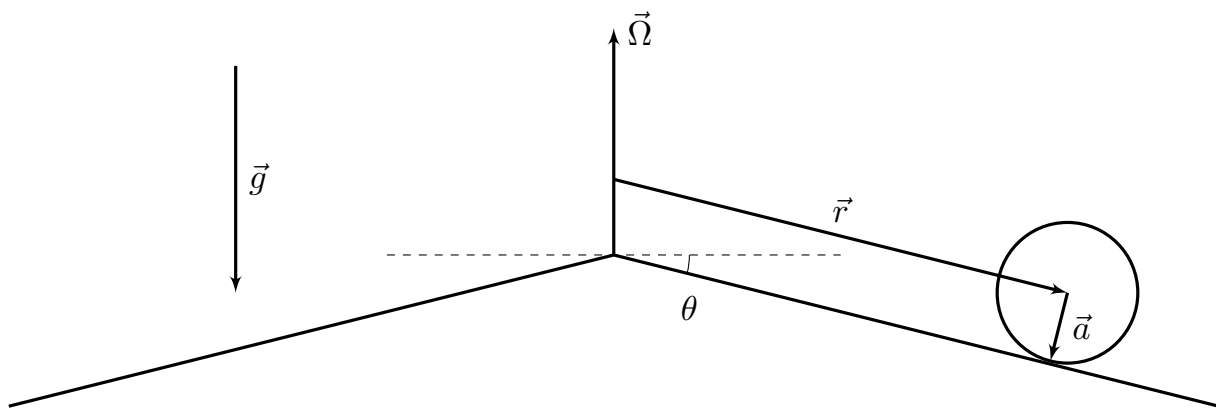
Качественно изобразите траектории центра шара при следующих начальных скоростях:

1. $\vec{v}_0 = \vec{u}$
2. $\vec{v}_0 = 2.5\vec{u}$
3. $\vec{v}_0 = 5\vec{u}$
4. $\vec{v}_0 = 0$

Для случая 4 рассчитайте численно характерные размеры траектории для $g_{\parallel} = 1.0 \text{ м/с}^2$, $\Omega = 10 \text{ рад/с}$.

Часть С. Конический стол (6.1 балла)

Теперь стол представляет из себя коническую поверхность с углом раствора $\pi - 2\theta$ (см. рисунок). Исследуем движение шара без проскальзывания на таком столе, вращающемся с угловой скоростью $\vec{\Omega}$.



Введём единичные векторы в направлении радиус-вектора и угловой скорости конуса: $\vec{r} = r\vec{e}_r$ и $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$. Дополнительно обозначим угловую скорость поворота радиус-вектора $\zeta = \dot{\varphi}\vec{e}_z$, где φ – угол поворота шара вокруг оси конуса.

C1 Выразите $\ddot{\vec{r}}$ через m , β , $\vec{a}$, $\vec{r}$, $\vec{N}$, $\vec{g}$, $\vec{\omega}$

0.2

C2 Запишите условие кинематической связи. Выразите ответ через $\dot{\vec{r}}$, $\vec{a}$, $\vec{r}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\Omega}$.

0.4

C3 Выразите $\ddot{\vec{r}}$ через m , β , $\vec{a}$, $\vec{N}$, $\vec{g}$, $\dot{\vec{r}}$, $\vec{\Omega}$, $\vec{\zeta}$, $\vec{\omega}$.

0.9

При $\theta \ll 1$ и с учётом некоторых других приближений, которые далее будем считать выполненными, уравнение пункта **C3** принимает вид:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{1+\beta} \left(\vec{g} + \frac{\vec{N}}{m} \right) + \frac{\beta[\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}]}{1+\beta}.$$

Далее используйте данное выражение.

Road to IPhO

C4 Докажите, что в рассматриваемом приближении сохраняется величина:

1.0

$$l = r^2 \left(\dot{\zeta} - \frac{\Omega \beta}{2(1 + \beta)} \right).$$

Здесь $\zeta = |\vec{\zeta}|$.

C5 Выразите $\ddot{r}$ через $r, \zeta, \beta, \Omega, \theta$ и g .

0.5

C6 Определите, при каких значениях r возможно движение по круговым траекториям вокруг оси симметрии конуса ($r = \text{const}$) и определите значения ζ , соответствующее такому движению. Выразите ответ через r, β, Ω, θ и g . **0.7**

Теперь исследуем движение по траекториям, отличным от круговых.

C7 Выразите $\dot{r}^2$ с точностью до произвольной постоянной через l, r, g, β, Ω и θ . Качественно изобразите вид фазовых диаграмм $\dot{r}(r)$. **0.8**

C8 Рассмотрим малое возмущение круговой орбиты с радиусом r_0 . Определите циклическую частоту ξ малых радиальных колебаний. Выразите ответ через $\Omega, r_0, \theta, g, \beta$. **0.4**

C9 Пусть шар изначально движется с $\dot{\varphi} = \zeta_0 = 0.44$ рад/с, $\dot{r} = 0$, $r_0 = 15$ см по конусу с $\theta = 1^\circ$ и $\Omega = 10$ рад/с. Изобразите вид траектории и укажите её характерные размеры. Известно, что $g = 9.81$ м/с². **1.2**

Примечание: можете считать известным, что отклонение от круговой орбиты в этом случае мало, поэтому зависимость $\ddot{r}(r)$ и $\dot{\varphi}(r)$ можно приближать линейной функцией вблизи **СРЕДНЕГО** значения r .