



Обычно в специальной теории относительности (СТО) рассматривают движение только относительно инерциальных систем отсчета. Однако в теории рассматриваются и тела, движущиеся с ускорениями, которые также можно рассматривать как наблюдателей, производящих измерения. Связав систему отсчета с ускоренными наблюдателями, можно получить аналоги неинерциальных систем отсчета в СТО. Возможные определения ускоренного движения и способа, которым ускоренный наблюдатель определяет координаты не однозначны. В этой задаче мы рассмотрим некоторые из таких конструкций. Для простоты будем во всей задаче рассматривать только одномерное движение вдоль оси Ox . Если не оговорено обратного, положения наблюдателей задаются относительно некоторой инерциальной системы отсчета (СО) с координатой x и временем t . Как обычно в СТО, будем использовать понятие **события** – любого физического процесса, происходящего в заданной точке в заданный момент времени. В заданной системе отсчета в одномерном случае событие характеризуется временем t и координатой x , которые для краткости будем иногда называть **координатами события**.

Часть А. Псевдорелятивистские ускоренные наблюдатели (3.2 балла)

В этой части мы не будем рассматривать никаких релятивистских эффектов, кроме конечности скорости распространения сигналов. Рассмотрим систему изначально неподвижных наблюдателей (точечных частиц), которые движутся с постоянным ускорением в нерелятивистском смысле (то есть с постоянной производной скорости по времени в заданной системе координат). Наблюдатели могут обмениваться сигналами, которые распространяются со скоростью света c . Задача одномерная, рассматриваем только движение вдоль оси x . Все координаты и времена в этой части определяются относительно фиксированной инерциальной СО. Ускорение наблюдателя зависит от его начальной координаты d как

$$a(d) = \frac{a_0}{1 + 2a_0d/c^2}, \quad d \geq 0.$$

Такое движение не может продолжаться бесконечно долго, поскольку скорости частиц не могут превосходить скорость света.

A1 ^{0.10} Найдите максимально возможное время движения $t_{\max}$. Далее будем рассматривать только движение при временах, не превосходящих $t_{\max}$.

A2 ^{0.50} Покажите, что если для двух наблюдателей в начальный момент $d_1 < d_2$, то при $t < t_{\max}$ для их координат по-прежнему будет выполняться $x_1(t) < x_2(t)$.

A3 ^{1.00} Пусть наблюдатель 1 в момент времени t_1 испускает световой сигнал, а наблюдатель 2 получает его в момент времени t_2 . Ускорения наблюдателей a_1 и a_2 , начальные координаты d_1 и d_2 соответственно. Покажите, что между этими временами выполняется соотношение

$$\left(t_1 - \frac{c}{a_1}\right)^2 = \varepsilon \left(t_2 - \frac{c}{a_2}\right)^2,$$

если $d_2 > d_1$, и соотношение

$$\left(t_1 + \frac{c}{a_1}\right)^2 = \varepsilon \left(t_2 + \frac{c}{a_2}\right)^2,$$

если $d_2 < d_1$. Выразите постоянную ε через a_1 и a_2 .

A4 ^{1.30} Для того, чтобы измерить расстояние до другого наблюдателя, наблюдатель 1 (с начальным значением координаты d_1) испускает в момент времени t_A луч, который достигает наблюдателя 2 (с начальной координатой $d_2 > d_1$) в некоторый момент времени t_C , отражается и возвращается к первому наблюдателю в момент времени t_B (по часам лабораторной СО). Тогда наблюдатель 1 считает, что расстояние до наблюдателя 2 равно $D_{\text{rad}} = c(t_B - t_A)/2$. Выразите это расстояние через d_1 , d_2 , a_0 , c и покажите, что оно не зависит от t_A .

A5 ^{0.30} Пусть $d_1 = d$, а $d_2 = d_1 + \Delta d$, где $\Delta d \ll d$ – положительное расстояние между наблюдателями. Выразите D_{rad} в первом порядке малости по Δd через d , a_0 , c и Δd .

Таким образом, мы увидели, что за счет конечной скорости распространения сигналов измеряемое наблюдателями расстояние друг до друга оказывается постоянным, хотя они и движутся с разными ускорениями, и расстояние в лабораторной СО меняется.

Часть В. Радарные координаты и преобразования Лоренца (1.3 балла)

Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета, с координатами (t, x) движется наблюдатель, координата и время которого зависят от его собственного времени как $(t_O(\tau), x_O(\tau))$. (Собственное время – время по часам самого наблюдателя.) Для того, чтобы определить координаты и времена событий, этот наблюдатель освещает все вокруг лучами радара (излучение радара движется с постоянной скоростью c) и измеряет времена, когда его достигает отраженный сигнал. Пусть некоторое событие произошло в момент времени t , в точке с координатой x . Пусть τ_1 – собственное время, в которое наблюдатель должен был отправить сигнал, чтобы этот сигнал достиг события, а τ_2 – собственное время, в которое наблюдатель получит сигнал, испущенный в момент события. Тогда он приписывает событию время и координату

$$T = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2), \quad X = \pm \frac{c}{2}(\tau_2 - \tau_1).$$

Знаку плюс отвечает случай, когда событие произошло справа от наблюдателя (при больших значениях координаты x), знак минус – слева. В этой части мы проверим, что для наблюдателя, движущегося с постоянной скоростью, эта конструкция воспроизводит стандартные координаты в движущейся инерциальной СО.

B1 ^{0.20} Пусть наблюдатель движется относительно инерциальной системы отсчета со скоростью v . При этом в момент времени $t = 0$, $x = 0$. Выразите x , t через τ .

B2 ^{0.70} Пусть некоторое событие произошло в точке с временем и координатой (t, x) . Определите для него значения собственного времени τ_1 , τ_2 . Для простоты можете провести вычисления только для случая, когда событие произошло справа от наблюдателя.

B3 ^{0.40} Покажите, что определенные таким образом время и координата (T, X) совпадают с временем и координатой в инерциальной СО, движущейся со скоростью v относительно исходной СО.

Часть С. Ускоренные наблюдатели (5.5 баллов)

Теперь рассмотрим наблюдателя, движущегося с постоянным ускорением g в сопутствующей СО (инерциальной СО, в которой в данный момент времени скорость наблюдателя равна нулю).

C1^{0.80} Покажите, что при подходящем выборе начальных условий для такого наблюдателя зависимость координаты и времени от собственного времени имеет вид

$$x = A \operatorname{ch} \alpha \tau, \quad t = B \operatorname{sh} \alpha \tau.$$

Определите значения постоянных A, B, α . Выразите ответ через g, c .

C2^{1.50} Пусть в момент времени t в точке с координатой x произошло некоторое событие. Эти координаты (t, x) можно выразить через X и T (определенные для наблюдателя из **C1** способом, описанным во введении к части **B**) следующим образом:

$$x = Af(X) \operatorname{ch} \alpha T, \quad t = Bf(X) \operatorname{sh} \alpha T,$$

где A, B, α – постоянные, определённые в предыдущем пункте, а $f(X)$ – некоторая функция координаты X . Таким образом, пару чисел можно рассматривать как координаты события в неинерциальной системе отсчета. Однако оказывается, что изменяя значения T, X можно получить не все координаты (t, x) . Это связано с тем, что сигнал от некоторых событий никогда не достигает наблюдателя.

Выразите функцию $f(X)$ через g и c . Для простоты можете ограничиться случаем, когда событие произошло справа от наблюдателя. Если событие находится слева от наблюдателя, вид зависимости (t, x) от (T, X) такой же. Изобразите в координатах (x, t) область пространства-времени, которая покрывается координатами (X, T) , когда они меняются от $-\infty$ до $+\infty$.

C3^{0.50} Напомним, что интервалом между двумя бесконечно близкими событиями называется величина, квадрат которой равен $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$. Покажите, что интервал между двумя близкими событиями можно записать в виде

$$ds^2 = F(X, T)(c^2 dT^2 - dX^2).$$

Найдите функцию $F(X, T)$. В ответ могут входить g, c .

C4^{0.70} В построенной таким образом системе координат естественно считать неподвижными тела, для которых $X = \operatorname{const}$. Покажите, что такие тела движутся с постоянным ускорением в сопутствующей СО, выразите это ускорение $a(X)$ через X, g, c . Таким образом, можно считать, что система отсчета образована наблюдателями, которые движутся по законам, определяемым условием $X = \operatorname{const}$.

C5^{0.70} Пусть наблюдатель с координатой X_0 в момент T_0 испускает световой луч в положительном направлении оси x . Как для этого луча будет зависеть X от T в последующие моменты?

C6^{1.30} Пусть наблюдатель с координатой X_1 в момент T_1 испускает свет с длиной волны λ_1 (в сопутствующей СО наблюдателя). Определите длину волны λ_2 , которую измерит наблюдатель с координатой X_2 в своей сопутствующей СО. Считайте, что для наблюдателей $X_1, X_2 = \operatorname{const}$.