



Ферромагнитная жидкость и спонтанное нарушение симметрии

[Задачи](#)



[Корзина недоступна](#)

Чтобы пользоваться корзиной для создания наборов задач, [авторизуйтесь](#).

[Авторизация](#)

Многие физические системы обладают симметрией, то есть не изменяют своих свойств при некоторых преобразованиях, например при поворотах системы как целого. При спонтанном нарушении симметрии состояние системы с минимальной энергией менее симметрично, чем сама система. Так для некоторых ферромагнетиков энергия не зависит от направления магнитного момента, однако в намагниченном состоянии магнитный момент направлен в некоторую сторону, что явно задает выделенное направление. Часто спонтанное нарушение симметрии происходит при фазовых переходах, например из парамагнитного состояния в ферромагнитное. Также симметрии и их нарушение важны в физике элементарных частиц.

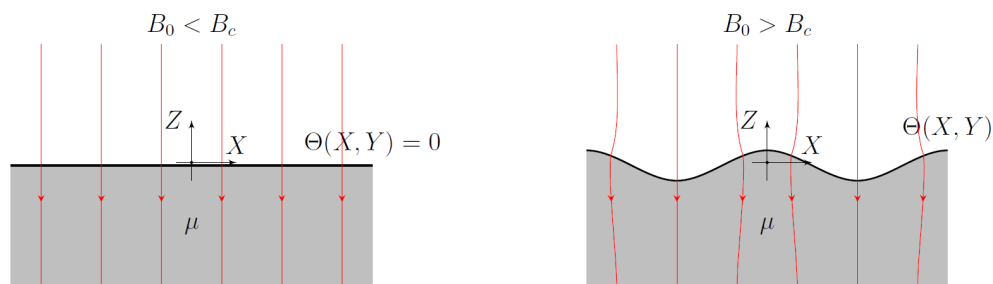
Ферромагнитная жидкость (феррофлюид) — жидкость, сильно поляризуемая в присутствии магнитного поля. Ферромагнитные жидкости представляют собой коллоидные системы, состоящие из ферромагнитных частиц нанометровых размеров, находящихся во взвешенном состоянии в несущей жидкости, в качестве которой обычно выступает органический растворитель или вода.

В течение всей задачи частные производные, например $\partial/\partial x$ обозначаются, как ∂_x . В частности, для некоторой функции f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y f, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \partial_z f.$$

Часть А. Предварительные данные (3 балла)

Рассмотрим **несжимаемую** жидкость со следующими характеристиками: плотность ρ , коэффициент поверхностного натяжения σ , магнитная проницаемость $\mu \neq 1$. В вертикальном гравитационном поле g эта жидкость заполняет полупространство $z < 0$ под вакуумом. После включения достаточно большого вертикального однородного магнитного поля B_0 ее поверхность искажается и становится функцией координат $\Theta(X, Y)$.



Данный процесс называют неустойчивостью Розенцвейга и он обусловлен тем, что когда магнитное поле B_0 оказывается выше некоторого B_c , образование пиков на поверхности жидкости является энергетически выгодным: парамагнитное вещество втягивается в область локального большого поля B , а на острой структуре локальное поле B в свою очередь еще увеличивается. Эффект локализации поля на острых металлических структурах хорошо известен для электрического поля и проявляется в данной системе в силу полной аналогии между электростатикой и магнитостатикой.



Knieling H. et al., 2007. Growth of surface undulations at the Rosensweig instability. Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 76(6), p.066301.

В эксперименте при $B_0 > B_c$ в качестве равновесного состояния наблюдается гексагональные решетки из пиков $\Theta(X, Y)$. Этот эффект можно рассматривать как параметрическую кристаллизацию двумерной жидкости в двумерный кристалл. Такой двумерный кристалл можно «расплавить», если его «нагреть», то есть пустить по нему случайные волны. Вообще говоря, поведение ферромагнитной жидкости во внешнем поле является сильно нелинейным, и система обладает множеством стабильных состояний: солитоны, одномерные волны, квадратная решетка и т.д. Но мы будем рассматривать в этой задаче только гексагональную решетку.

Будем называть фазу при $B_0 < B_c$ **жидкой**, а фазу при $B_0 > B_c$ **кристаллической**. Далее, будем работать в терминах усреднения по поверхности жидкости и обозначать такое усреднение угловыми скобками:

$$\langle F \rangle = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_S F dX dY$$

Обратите внимание, что интегрирование идет в переменных X и Y , то есть указанное выражение **не является** интегралом по поверхности жидкости $\Theta(X, Y)$.

A1^{0.20} Чему равно $\langle \Theta \rangle$ в кристаллической фазе?

- **Симметрией системы** называют ее преобразования, которые не приводят к изменению ее законов движения.
- **Симметрией состояния системы** называют преобразования этого состояния, при котором оно переходит само в себя.

Рассмотрим классический пример системы, демонстрирующей нарушение симметрии: энергия Π **одной** покоящейся материальной точки массы m в гравитационном поле в яме:

$$\Pi(\xi) = mg (\alpha \xi^2 + \beta \xi^4), \quad \beta > 0.$$

Энергия состояния такой системы при фиксированных α и β является функцией координаты ξ , то есть состояние системы (положение материальной точки) полностью задается выбором значения ξ .



При этом сама энергия системы не меняет вид зависимости от ξ относительно отражения $\xi \rightarrow -\xi$ при любых значениях параметра α . То есть отражение координаты является **симметрией системы**.

При $\alpha > 0$ положение равновесия находится в точке $\xi = 0$, и этот случай соответствует **жидкой фазе**. Это положение равновесия при отражении $\xi \rightarrow -\xi$ переходит само в себя, то есть отражение является **симметрией жидкой фазы**.

При $\alpha < 0$ положение равновесия $\xi = 0$ теряет свою устойчивость и в системе возникает два физически **разных** устойчивых положения шарика: $\pm\xi_0$ и это соответствует **кристаллической фазе**. Пусть шарик находится справа, тогда при отражении он переходит в левое состояние, то есть начинает характеризоваться другой ξ . Это значит, что положения равновесия переходят друг в друга но **НЕ** сами в себя, поэтому отражение **НЕ** является **симметрией кристаллической фазы**.

Опишем ферромагнитную жидкость во внешнем поле аналогичным образом. Полная энергия ферромагнитной жидкости $\Pi[\Theta(X, Y)]$ зависит от формы ее поверхности $\Theta(X, Y)$ как от функции, то есть $\Theta(X, Y)$ является аналогом ξ . Аналогом параметра α выступает некоторая функция внешнего магнитного поля B_0 .

Рассмотрим два преобразования системы:

- Трансляция $T_{\vec{a}}$ на вектор $\vec{a}$. Преобразование: $(X', Y') = (X + a_X, Y + a_Y)$;
- Поворот R_φ на угол φ . Преобразование: $(X', Y') = (X \cos \varphi - Y \sin \varphi, Y \cos \varphi + X \sin \varphi)$

и их комбинации.

Примечание: Пункты А2-А4 независимы от остальных частей задачи и не требуются для их решения.

А2 ^{0.20} Опишите симметрии системы, то есть преобразования, которые не изменяют вид зависимость энергии Π системы от $\Theta(X, Y)$.

А3 ^{0.20} Опишите симметрии равновесного состояния жидкой фазы, то есть преобразования, которые не изменяют состояние системы: $\Theta(X', Y') = \Theta(X, Y)$.

А4 ^{0.40} Опишите симметрии равновесных состояний кристаллической фазы.

В энергию единицы поверхности жидкости $dS = dX dY$ вносят вклад три эффекта: энергия жидкости в гравитационном поле Π_g , поверхностная энергия Π_σ жидкости, энергия Π_B диполей жидкости в магнитном поле с объемной плотностью $-\frac{\mu_0}{2} \vec{H}_0 \vec{M}(X, Y, Z)$, где $\vec{H}_0$ – напряженность внешнего магнитного поля в вакууме (до внесения в него жидкости), $\vec{M}(X, Y, Z)$ – намагниченность вещества.

В каждом слагаемом предполагается усреднение некоторых величины по площади.

A5 ^{0.60} Запишите Π_g через ρ , g и $\langle \Theta^2 \rangle$.

Пусть поверхность задана уравнением $Z = f(X, Y)$. Тогда элемент площади поверхности, лежащей над площадкой $dXdY$ задается выражением

$$dS = dXdY \sqrt{1 + (\partial_X f)^2 + (\partial_Y f)^2}.$$

A6 ^{0.20} Запишите Π_σ через σ и усреднение, содержащие $(\nabla_0 \Theta)^2$, где $\nabla_0 = (\partial_X, \partial_Y)$ это двумерный вектор набла.

$$\nabla_0 \Theta = \begin{pmatrix} \partial_X \Theta \\ \partial_Y \Theta \end{pmatrix}$$

A7 ^{0.60} Запишите Π_B через $\vec{B}(X, Y, Z)$, $\vec{B}_0$, μ , μ_0 и Θ . Запись может содержать усреднение от интеграла вдоль оси Z .

Считайте, что слой жидкости является бесконечно глубоким.

Сделаем задачу безразмерной, для этого рассмотрим

$$U = U_g + U_\sigma + U_B = (\Pi_g + \Pi_\sigma + \Pi_B)/\sigma$$

и сделаем линейные размеры безразмерными: $(X, Y, Z) = \sqrt{\sigma/(\rho g)} \cdot (x, y, z)$. Поверхность $\Theta(X, Y)$ при таком переходе становится безразмерной функцией $\zeta(x, y)$ безразмерных координат x, y :

$$\Theta(X, Y) = \sqrt{\sigma/(\rho g)} \cdot \zeta(x, y)$$

A8 ^{0.60} Запишите выражение для безразмерной энергии U единицы безразмерной площади системы. В ответ могут входить ζ , μ , μ_0 , $\sqrt{\sigma \rho g}$, $\vec{B}(x, y, z)$, $\vec{B}_0$, безразмерная $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ и интегрирование по безразмерному z .

Часть В. Магнитное поле на неровной границе (5 баллов)

В данной части мы рассмотрим, как изменяется однородное магнитное поле B_0 на неровной границе раздела между вакуумом и парамагнитным ($\mu > 1$) веществом.

Решим задачу пертурбативно: рассмотрим малые возмущения магнитного поля относительно случая, когда поверхность является плоской и горизонтальной, то есть для любых x и y выполняется, что $\zeta(x, y) = 0$.

Будем работать в безразмерных единицах длины, представленных в прошлой части.

Магнитное поле в случае, когда парамагнитное вещество имеет плоскую поверхность, является вертикальным однородным и имеет индуктивность B_0 .

Если некоторая величина зависит от z , то для ее значения в вакууме используйте индекс $\uparrow$, а для ее значения в парамагнетике индекс $\downarrow$.

B1 ^{0.30} Чему равен скачок ΔH напряженность магнитного поля на поверхности парамагнетика в случае плоской поверхности? Знак выбран следующим образом: $\Delta H = H_{0\uparrow}(z=0) - H_{0\downarrow}(z=0)$. Ответ выразите через B_0 , μ и μ_0 .

В случае малых искажений поверхности $\zeta(x, y) \neq 0$ магнитное поле испытывает малые возмущения: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$, $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}$. Мы рассматриваем задачу магнитостатики при отсутствии токов, поэтому можно ввести магнитостатический потенциал ϕ :

$$(\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi) = \vec{h}.$$

Возмущения поверхности будем считать слабыми в терминах $\partial_{x,y} \zeta \ll 1$. При этом будем рассматривать случай $\langle \zeta \rangle = 0$.

От перехода к безразмерным координатам определение дивергенции не меняется:

$$\text{div } \vec{b} = \partial_x b_x + \partial_y b_y + \partial_z b_z$$

B2 ^{0.30} Запишите уравнение $\text{div } \vec{b} = 0$ в вакууме и внутри вещества через частные производные второго порядка $\partial_{x,y,z}^2 \phi_{\uparrow,\downarrow}$.

B3 ^{0.30} Запишите приближенное уравнение, соответствующие граничному условию для поля $\vec{B}$. В ответ могут входить **только** компоненты полей $\vec{b}_{\uparrow,\downarrow}$.

B4 ^{0.60} Запишите приближенные уравнения, соответствующие граничному условию для поля $\vec{H}$. В ответ могут входить компоненты поля $\vec{h}_{\uparrow,\downarrow}$, ΔH и $\partial_{x,y} \zeta$.

В силу малости возмущений $|\vec{h}| \ll \Delta H$.

Разложим поверхность по модам $\vec{k} = (k_x, k_y)$ и сдвинем точку $\vec{r}_0 = (0, 0)$ в ближайший пик. Тогда $\zeta(x, y) = \sum a_i \cos \vec{k}_i \vec{r}$, где i - номер моды. Такие поверхности будут в линейном приближении генерировать возмущения $\phi(x, y, z) = \sum u_i(z) \cos \vec{k}_i \vec{r}$. При этом приближенные граничные условия будут выполнены только в ведущем порядке по $|\vec{k}_i| a_i$.

Обратите внимание, что $\vec{k}$ и $\vec{r}$ двумерные. Наши уравнения являются линейными, поэтому можно искать $u_i(z)$ для каждой моды независимым образом.

B5 ^{0.70} С помощью пункта **B2** получите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции $u_{i\uparrow,\downarrow}$. Найдите вид решений (т.е. в ответ могут входить неизвестные константы) $u_{i\uparrow,\downarrow}(z)$ в вакууме и в парамагнетике. Постройте качественный график $u_{i\uparrow}$ и $u_{i\downarrow}$ от z .

Напомним, что $\phi(x, y, z)$ создает **малые** возмущения магнитного поля **во всем** пространстве, в т.ч. при $z = \pm\infty$.

B6 ^{0.80} Найдите значения констант из предыдущего пункта и запишите $\phi_{\uparrow,\downarrow}(\vec{r}, z)$ в вакууме и в парамагнетике. В ответ могут входить ΔH , μ , k_i и $a_i \cos \vec{k}_i \vec{r}$.

Учтите, что $k_i \cdot \zeta(x, y) \ll 1$.

Пусть в случае плоской поверхности $\zeta(x, y) = 0$ безразмерная энергия магнитного поля, приходящаяся на единицу безразмерной площади, равна U_{B0} , а в случае рассмотренной выше неровной поверхности $\zeta(x, y)$ она равна $U_{B0} + \Delta U_B$.

Сделаем дополнительное ограничение на возможные $\zeta(x, y)$. Пусть поверхность $\zeta(x, y)$ состоит только из мод с одинаковым модулем волнового вектора k , то есть для любого k_i в формуле

$$\zeta(x, y) = \sum a_i \cos \vec{k}_i \vec{r}$$

выполняется $|\vec{k}_i| = k$.

Пользуйтесь безразмерной энергией единицы поверхности U_B из **части А**.

В7 ^{0.80} Выразите добавку к энергии магнитного поля ΔU_B через усредненный интеграл содержащий $\vec{b}$.

В8 ^{1.20} Найдите добавку к энергии магнитного поля ΔU_B , приходящейся на единицу площади. Ответ выразите через μ , μ_0 , B_0 , $\sqrt{\sigma \rho g}$, k , a и $\langle \zeta^2 \rangle$.

Часть С. Линейный анализ (2 балла)

Поверхность с регулярной гексагональной решеткой из пиков с амплитудой A можно представить, как сумму по трем $\vec{k}$ с одинаковым модулем: $\zeta(\vec{r}) = \sum a_i \cos \vec{k}_i \vec{r}$. Также $ka \ll 1$.

С1 ^{0.30} Как связаны направления $\vec{k}_i$ друг с другом? Как связаны a_i друг с другом и с A ?

С2 ^{1.20} Найдите U как функцию A , k и параметров системы μ , μ_0 , $\sqrt{\sigma \rho g}$ и B_0 .

С3 ^{0.20} При каком B_c состояние $\zeta(x, y) = 0$ теряет устойчивость?

С4 ^{0.20} Гексагональная решетка с каким k_c возникает на поверхности жидкости при $B > B_c$, $B/B_c - 1 \ll 1$?

С5 ^{0.10} Будет ли наблюдаться неустойчивость Розенцвейга в диамагнитной ($\mu < 1$) жидкости?

Т, Потенциал, Электромагне

2020 — Мы те, кого должны превзойти.

[Website in English](#)

