

A1 0.70 Запишите выражение для полезной мощности двигателя. Выразите ответ через Q_1 , Q_2 , γ , D , τ .

Смещение поршня в одну сторону происходит за время $\tau/2$, поэтому его скорость во время движения $v = 2D/\tau$, а значит мощность силы трения

$$P_{fr} = -\gamma v^2 = -\frac{4\gamma D^2}{\tau^2}.$$

Подведенная к двигателю мощность, затрачиваемая на работу

$$P_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{\tau}.$$

Тогда полезная мощность

Ответ:

$$P = \frac{Q_1 - Q_2}{\tau} - \frac{4\gamma D^2}{\tau^2}$$

A2 0.30 Найдите оптимальную продолжительность цикла τ , при которой мощность будет максимальной.

Дифференцируя мощность по τ , получим

$$-\frac{Q_1 - Q_2}{\tau^2} + \frac{8\gamma D}{\tau^3} = 0,$$

откуда

Ответ:

$$\tau = \frac{8\gamma D}{Q_1 - Q_2}$$

A3 0.30 Найдите выражение для КПД (отношения полезной работы к подведенному количеству теплоты) в случае работы двигателя при оптимальной продолжительности цикла.

Полезная работа, совершенная за цикл

$$A = Q_1 - Q_2 + P_{fr}\tau = Q_1 - Q_2 - \frac{4\gamma D}{\tau} = \frac{Q_1 - Q_2}{2}.$$

Разделив на подведенное количество тепла, получим КПД

Ответ:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{2Q_1}$$

A4 0.20 Пусть Q_1 , Q_2 такие же, как если бы двигатель работал по идеальному циклу Карно. Выразите КПД рассматриваемого цикла через КПД такого цикла Карно η_c .

Для цикла Карно

$$\eta_c = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

поэтому

Ответ:

$$\eta = \frac{\eta_c}{2}$$

B1 0.80 Определите количества теплоты Q_1 и Q_2 , выразите ответ через ν , R , T_1' , T_2' , V_1 , V_2 .

На изотерме внутренняя энергия идеального газа не меняется, поэтому подведенное количество теплоты равно совершенной газом работе

$$Q_1 = A_1 = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \nu R T'_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu R T'_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Пусть на второй изотерме объем уменьшается от V_3 до V_4 . Запишем уравнения двух адиабат в переменных (V, T) , получим

$$T'_1 V_2^{\gamma-1} = T'_2 V_3^{\gamma-1}, \quad T'_1 V_1^{\gamma-1} = T'_2 V_4^{\gamma-1},$$

откуда получаем соотношение между объемами

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Тогда на второй изотерме отводится тепло

$$Q_2 = -A = - \int_{V_3}^{V_4} \nu R T'_2 \frac{dV}{V} = \nu R T'_2 \ln \frac{V_3}{V_4} = \nu R T'_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Альтернативно можно заметить, что рассматриваемый цикл – это цикл Карно между температурами T'_1 и T'_2 , поэтому между теплотами выполняется соотношение

$$\frac{Q_1}{T'_1} = \frac{Q_2}{T'_2},$$

позволяющее сразу выразить Q_2 через Q_1 . Это соотношение следует из равенства нулю полного изменения энтропии за цикл (без учета теплообмена с внешними источниками) или непосредственно из формулы для КПД цикла Карно.

Ответ:

$$Q_1 = \nu R T'_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad Q_2 = \nu R T'_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

B2^{0.40}

Выразите время цикла t_c через $Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2, \Delta T_1, \Delta T_2$. Временем, которое занимают адиабатические процессы, можно пренебречь.

Продолжительность каждой из изотерм равна подведенному или отведенному количеству тепла, деленному на соответствующую мощность. Полное время – сумма времен на двух изотермах

Ответ:

$$t_c = \frac{Q_1}{\alpha_1 \Delta T_1} + \frac{Q_2}{\alpha_2 \Delta T_2}.$$

B3^{0.40}

Выразите полезную мощность цикла P через $T_1, T_2, \Delta T_1, \Delta T_2, \alpha_1, \alpha_2$.

Полезная мощность равна отношению работы за цикл к его времени, найденном в предыдущем пункте

$$P = \frac{Q_1 - Q_2}{t_c} = \frac{Q_1 - Q_2}{\frac{Q_1}{\alpha_1 \Delta T_1} + \frac{Q_2}{\alpha_2 \Delta T_2}}.$$

Подставим в это выражение формулы для количеств теплоты. После этого множители $\nu R \ln(V_2/V_1)$ сократятся

$$P = \frac{T'_1 - T'_2}{\frac{T'_1}{\alpha_1 \Delta T_1} + \frac{T'_2}{\alpha_2 \Delta T_2}}$$

Также используем формулы для $T'_1 = T_1 - \Delta T_1$ и $T'_2 = T_2 + \Delta T_2$. Окончательно получим

Ответ:

$$P = \frac{\frac{T_1 - T_2 - \Delta T_1 - \Delta T_2}{\frac{T_1 - \Delta T_1}{\alpha_1 \Delta T_1} + \frac{T_2 + \Delta T_2}{\alpha_2 \Delta T_2}}}{\alpha_1 \alpha_2} = \alpha_1 \alpha_2 \frac{\Delta T_1 \Delta T_2 (T_1 - T_2 - \Delta T_1 - \Delta T_2)}{\alpha_1 T_2 \Delta T_1 + \alpha_2 T_1 \Delta T_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T_1 \Delta T_2}$$

B4^{0.40}

Будем рассматривать только циклы, продолжающиеся фиксированное время t_c . Найдите следующее отсюда соотношение между приращениями $d\Delta T_1$ и $d\Delta T_2$. Выразите ответ через $T_1, T_2, \alpha_1, \alpha_2, \Delta T_1, \Delta T_2$.

Не учитывая постоянный множитель $\nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$, запишем

$$t_c \sim \frac{T_1 - \Delta T_1}{\alpha_1 \Delta T_1} + \frac{T_2 + \Delta T_2}{\alpha_2 \Delta T_2} = \frac{T_1}{\alpha_1 \Delta T_1} + \frac{T_2}{\alpha_2 \Delta T_2} - \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Дифференцируя, получим

Ответ:

$$\frac{T_1}{\alpha_1 \Delta T_1^2} d\Delta T_1 + \frac{T_2}{\alpha_2 \Delta T_2^2} d\Delta T_2 = 0$$

B5 0.50

Пусть продолжительность цикла t_c фиксирована. Найдите отношение $\Delta T_1 / \Delta T_2$, при котором мощность P максимальна.

При фиксированной продолжительности цикла мощность будет максимальна при максимальной работе $Q_1 - Q_2$, то есть с точностью до постоянного множителя нужно максимизировать выражение $T_1 - T_2 - \Delta T_1 - \Delta T_2$, а значит

$$d\Delta T_1 - d\Delta T_2 = 0.$$

Подставляя в результаты предыдущего пункта получим

$$\left(\frac{T_1}{\alpha_1 \Delta T_1^2} - \frac{T_2}{\alpha_2 \Delta T_2^2} \right) = 0,$$

Ответ:

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \left(\frac{\alpha_2 T_1}{\alpha_1 T_2} \right)^{1/2}$$

B6 0.80

Продифференцируйте мощность по ΔT_1 . Покажите, что условие равенства нулю этой производной можно записать в виде

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = h \frac{P}{\Delta T_1 \Delta T_2},$$

где h – некоторая величина, не зависящая от ΔT_1 и ΔT_2 . Получите выражение для h .

Обозначим $\Delta T = T_1 - T_2 - \Delta T_1 - \Delta T_2$, $y = \alpha_1 T_2 \Delta T_1 + \alpha_2 T_1 \Delta T_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T_1 \Delta T_2$. Тогда выражение для мощности примет вид

$$P = \alpha_1 \alpha_2 \frac{\Delta T_1 \Delta T_2 \Delta T}{y}.$$

С учетом производных

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial \Delta T_1} = -1, \quad \frac{\partial y}{\partial \Delta T_1} = \alpha_1 T_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T_2,$$

получим

$$\frac{\partial P}{\partial \Delta T_1} = \alpha_1 \alpha_2 \frac{\Delta T_2 \Delta T y - \Delta T_1 \Delta T_2 y - \Delta T_1 \Delta T_2 \Delta T (\alpha_1 T_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T_2)}{y^2}.$$

Приравнивая числитель дроби к нулю и сокращая на ΔT_2 , получим

$$\Delta T (y - \Delta T_1 (\alpha_1 T_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T_2)) - \Delta T_1 \Delta T_2 y = 0,$$

откуда после упрощения первой скобки

$$\alpha_2 T_1 \Delta T_2 \Delta T - \Delta T_1 y = 0, \quad \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \alpha_2 T_1 \frac{\Delta T}{y}.$$

Выражая $\Delta T / y$ через мощность, получим

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{T_1}{\alpha_1} \frac{P}{\Delta T_1 \Delta T_2}.$$

Ответ:

$$h = \frac{T_1}{\alpha_1}$$

B7^{1.20}

Используя результаты предыдущих двух пунктов, определите значения ΔT_1 , ΔT_2 , при которых мощность максимально. То, что найденные значения соответствуют именно максимуму доказывать не требуется. Выразите ответ через T_1 , T_2 , α_1 , α_2 . Вы можете существенно упростить вычисления, если будете считать, что соотношения между ΔT_1 и ΔT_2 , полученное в предыдущем пункте, выполняется.

Подставим в формулу из предыдущего пункта найденное ранее значение $\Delta T_1/\Delta T_2$ и явное выражение для P . Получим уравнение, связывающее ΔT_1 и ΔT_2 :

$$\left(\frac{\alpha_2 T_1}{\alpha_1 T_2}\right)^{1/2} = \alpha_2 T_1 \frac{T_1 - T_2 - \Delta T_1 - \Delta T_2}{\alpha_1 T_2 \Delta T_1 + \alpha_2 T_1 \Delta T_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T_1 \Delta T_2},$$

откуда

$$\alpha_1 T_2 \Delta T_1 + \alpha_2 T_1 \Delta T_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T_1 \Delta T_2 = (\alpha_1 \alpha_2 T_1 T_2)^{1/2} (T_1 - T_2 - \Delta T_1 - \Delta T_2).$$

Выразив здесь ΔT_2 через ΔT_1 , получим квадратное уравнение относительно ΔT_1 . Отметим, что при прямом вычислении производной мощности по ΔT_1 получилось бы намного больше слагаемых, что значительно затруднило бы получение окончательного ответа.

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \left(\frac{\alpha_1 T_2}{\alpha_2 T_1}\right)^{1/2} \Delta T_1^2 + 2(\alpha_1 T_2 + (\alpha_1 \alpha_2 T_1 T_2)^{1/2}) \Delta T_1 - (\alpha_1 \alpha_2 T_1 T_2)^{1/2} (T_1 - T_2) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} D &= \alpha_1 T_2 (\sqrt{\alpha_1 T_2} + \sqrt{\alpha_2 T_1})^2 + \alpha_1 T_2 (\alpha_1 - \alpha_2) (T_1 - T_2) \\ &= \alpha_1 T_2 (\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + 2(\alpha_1 \alpha_2 T_1 T_2)^{1/2}) = \alpha_1 T_2 (\sqrt{\alpha_1 T_1} + \sqrt{\alpha_2 T_2})^2 \end{aligned}$$

Тогда один из корней уравнения

$$\Delta T_1 = \left(\frac{\alpha_2 T_1}{\alpha_1 T_2}\right)^{1/2} \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} (-\alpha_1 T_2 - (\alpha_1 \alpha_2 T_1 T_2)^{1/2} + \alpha_1 \sqrt{T_1 T_2} + T_2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}).$$

Разложим выражение в числителе на множители

$$\Delta T_1 = \left(\frac{\alpha_2 T_1}{\alpha_1 T_2}\right)^{1/2} \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}) (\sqrt{T_1 T_2} - T_2) = \frac{T_1 - \sqrt{T_1 T_2}}{1 + \sqrt{\alpha_1/\alpha_2}}.$$

Второй корень можно найти аналогично или с помощью теоремы Виета,

$$\Delta T_1^{(2)} = \frac{T_1 + \sqrt{T_1 T_2}}{1 - \sqrt{\alpha_1/\alpha_2}}.$$

При $\alpha_1 < \alpha_2$ этот корень больше T_1 (что делает T_1' отрицательным), а при $\alpha_1 > \alpha_2$ отрицателен. В обоих случаях второй корень не имеет физического смысла. Тогда

$$\Delta T_2 = \frac{\sqrt{T_1 T_2} - T_2}{1 + \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}}.$$

Ответ:

$$\Delta T_1 = \frac{T_1 - \sqrt{T_1 T_2}}{1 + \sqrt{\alpha_1/\alpha_2}}, \quad \Delta T_2 = \frac{\sqrt{T_1 T_2} - T_2}{1 + \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}}$$

B8^{0.70}

Найдите значение максимальной мощности P и КПД η цикла при оптимальных значениях ΔT_1 , ΔT_2 . Выразите ответ через T_1 , T_2 , α_1 , α_2 .

Используя значения разностей температур и формулу из B6, получим

$$P = \frac{\alpha_1}{T_1} \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \Delta T_1 \Delta T_2 = \frac{\alpha_1}{T_1} \left(\frac{T_1 - \sqrt{T_1 T_2}}{1 + \sqrt{\alpha_1/\alpha_2}}\right)^2 = \alpha_1 \alpha_2 \frac{(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2}{(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})^2}.$$

Коэффициент полезного действия

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2'}{T_1'} = 1 - \frac{T_2 + \Delta T_2}{T_1 - \Delta T_1}, \\ \eta &= 1 - \frac{T_2 + \frac{\sqrt{T_1 T_2} - T_2}{1 + \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}}}{T_1 - \frac{T_1 - \sqrt{T_1 T_2}}{1 + \sqrt{\alpha_1/\alpha_2}}} = 1 - \frac{1 + \sqrt{\alpha_1/\alpha_2}}{1 + \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}} \cdot \frac{T_2 \sqrt{\alpha_2/\alpha_1} + \sqrt{T_1 T_2}}{T_1 \sqrt{\alpha_1/\alpha_2} + \sqrt{T_1 T_2}} \\ \eta &= 1 - \frac{T_2 \sqrt{\alpha_2} + \sqrt{T_1 T_2} \alpha_1}{T_1 \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{T_1 T_2} \alpha_2} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \end{aligned}$$

Ответ:

$$P = \alpha_1 \alpha_2 \frac{(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2}{(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})^2}, \quad \eta = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

B9 ^{0.30} Типичная температура нагревателя тепловой электростанции 560 °С, холодильника 25 °С. Вычислите для этих температур кпд цикла карно и кпд найденный в предыдущем пункте. Какое из этих значений лучше описывает измеренное значение $\eta = 0.36$?

Ответ:

$$\eta(\text{Карно}) = 0.64, \quad \eta(B8) = 0.40$$

Ближе к наблюдаемому значению модель B8

C1 ^{0.80} Выразите коэффициент полезного действия η тепловой машины через коэффициенты полезного действия ее частей η_1, η_2 (они определяются как отношения полезных работ к количествам теплоты, поданных на рабочее тело соответствующей машины), а также через коэффициенты N_1, N_2 .

Рабочее тело первой тепловой машины получает количество теплоты

$$Q_{H1} = Q_H - Q_{B1} = (1 - N_1)Q_H,$$

тогда ее работа

$$W_1 = \eta_1 Q_{H1} = \eta_1 (1 - N_1) Q_H.$$

Тогда рабочее тело второй тепловой машины получает количество тепла

$$Q_{H2} = (1 - \eta_1)Q_{H1} + Q_{B1} - Q_{B2}.$$

Здесь первое слагаемое – тепло, пришедшее от рабочего тела первой тепловой машины, Q_{B1} – от первого холодильника за счет утечки, Q_{B2} – тепло, теряемое за счет утечки.

Тогда полезная работа второй машины

$$W_2 = \eta_2 (1 - \eta_1) (1 - N_1) Q_H + \eta_2 N_1 Q_H - \eta_2 N_2 Q_H.$$

Коэффициент полезного действия цикла

$$\eta = \frac{W_1 + W_2}{Q_H} = \eta_1 (1 - N_1) + \eta_2 [(1 - \eta_1) (1 - N_1) + N_1 - N_2].$$

Упрощая, получим ответ

Ответ:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2 - N_1 \eta_1 (1 - \eta_2) - N_2 \eta_2.$$

C2 ^{0.90} Выразите η через температуры T_H, T_L, T_{L1} и коэффициенты K_1, K_2 . Считайте, что отдельные циклы тепловых двигателей — это циклы Карно.

Используем формулы для КПД циклов Карно

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_{L1}}{T_H}, \quad \eta_2 = 1 - \frac{T_L}{T_{L1}}.$$

Тогда слагаемые, не содержащие утечек, имеют вид

$$\eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2 = 1 - \frac{T_{L1}}{T_H} - \frac{T_L}{T_{L1}} - \left(1 - \frac{T_{L1}}{T_H}\right) \left(1 - \frac{T_L}{T_{L1}}\right) = 1 - \frac{T_L}{T_H},$$

то есть КПД цикла Карно с температурами T_H, T_L . Подставляя остальные слагаемые и выражения для N_i через разности температур, найдем

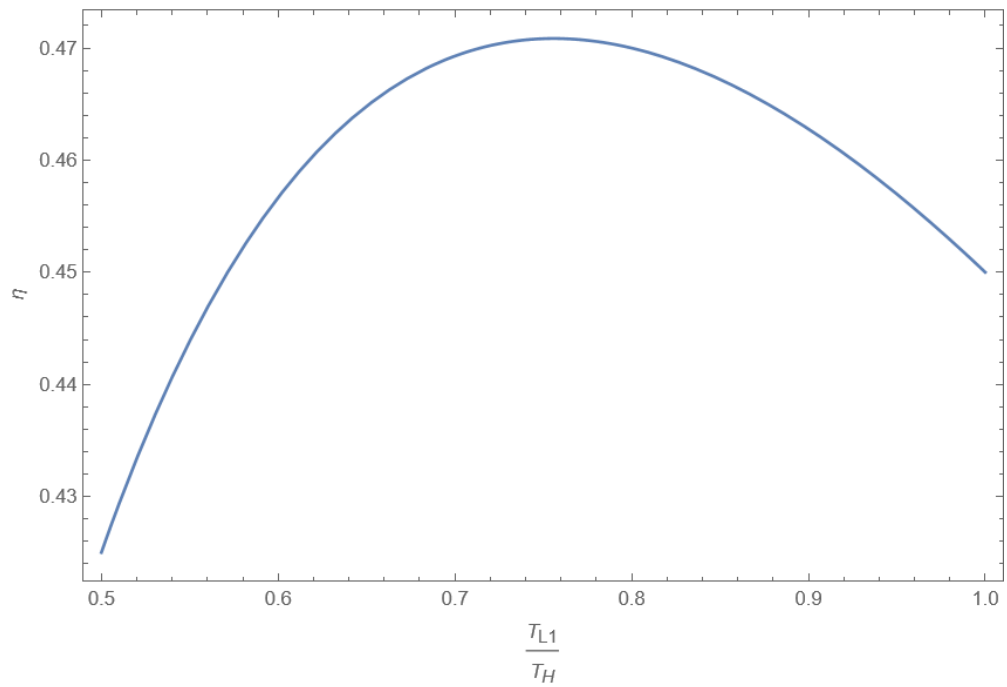
$$\eta = 1 - \frac{T_L}{T_H} - K_1 (T_H - T_{L1}) \frac{T_H - T_{L1}}{T_H} \frac{T_L}{T_{L1}} - K_2 (T_{L1} - T_L) \frac{T_{L1} - T_L}{T_{L1}},$$

Ответ:

$$\eta = 1 - \frac{T_L}{T_H} - K_1 \frac{(T_H - T_{L1})^2 T_L}{T_{L1} T_H} - K_2 \frac{(T_{L1} - T_L)^2}{T_{L1}}$$

C3 ^{0.40} При $T_L/T_H = 0.5, K_1 T_H = 0.3, K_2 T_H = 0.2$ постройте график зависимости КПД от отношения T_{L1}/T_H .

Ответ:



C4^{0.90} Найдите температуру промежуточного холодильника T_{L1} , при котором найденный КПД максимален. Для случая $K_1 = K_2$ приведите выражение для максимального КПД.

Продифференцируем формулу по T_{L1} , получим

$$\frac{\partial \eta}{\partial T_{L1}} = -K_1 \left[2 \frac{(T_{L1} - T_H)T_L}{T_{L1}T_H} - \frac{(T_{L1} - T_H)^2 T_L}{T_{L1}^2 T_H} \right] - K_2 \left[\frac{2(T_{L1} - T_L)}{T_{L1}} - \frac{(T_{L1} - T_L)^2}{T_{L1}^2} \right],$$

откуда находим

$$-K_1 \frac{T_L}{T_{L1}^2 T_H} (T_{L1}^2 - T_H^2) - \frac{K_2}{T_{L1}^2} (T_{L1}^2 - T_L^2) = 0,$$

откуда

$$T_{L1}^2 = T_L T_H \frac{K_1 T_H + K_2 T_L}{K_1 T_L + K_2 T_H}.$$

При $K_1 = K_2$ получаем $T_{L1} = \sqrt{T_H T_L}$.

Подставив это значение в формулу для КПД, получим

$$\eta = 1 - \frac{T_L}{T_H} - 2K \sqrt{\frac{T_L}{T_H}} (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_L})^2.$$

Ответ:

$$T_{L1} = \sqrt{T_L T_H \frac{K_1 T_H + K_2 T_L}{K_1 T_L + K_2 T_H}}, \quad \eta = 1 - \frac{T_L}{T_H} - 2K \sqrt{\frac{T_L}{T_H}} (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_L})^2$$