

A1 ^{0.30} На очень больших расстояниях L оцените по порядку величины размер пятна D на экране. Выразите ответ через λ , w_0 , L .

Характерный угол отклонения лучей из-за дифракции выражается через ширину пучка как

$$\theta \sim \frac{\lambda}{w_0}.$$

Тогда на расстоянии L ширина пучка $D \sim \theta L$

Ответ:

$$D \sim \frac{\lambda L}{w_0}$$

A2 ^{0.20} При каком ограничении на L применима теория дифракции Фраунгофера? Выразите ответ через L , w_0 , λ .

Если лучи, идущие от разных точек источника, параллельны, разность хода имеет вид $\Delta = d \sin \theta$, где θ – угол между лучом и нормалью к плоскости экрана, d – расстояние между точками источника. Поправка к этому выражению при конечных L по порядку величины равна d^2/L . Поскольку разность хода стоит в показателе экспоненты, эта поправка должна быть много меньше длины волны, тогда ей можно пренебречь, и приближение дифракции Фраунгофера будет работать. При этом в качестве расстояния между точками источника нужно взять величину порядка ширины пучка w_0 .

Ответ:

$$\frac{w_0^2}{L} \ll \lambda$$

A3 ^{0.80} Запишите в этом случае выражение для амплитуды электрического поля в виде интеграла по $dx' dy'$. Найдите выражение для амплитуды поля на экране в зависимости от расстояния до оси симметрии r . Также в ответ могут входить E_0 , w_0 , k .

Вам может потребоваться интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2+ibx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/4a}.$$

Для удобства вычислений будем вычислять амплитуду поля в точке экрана, лежащей на оси x , координаты которой $(r, 0, L)$. В силу симметрии задачи относительно оси, во всех точках на том же расстоянии r до оси амплитуда будет такой же. Тогда угол между лучами, идущими в точку наблюдения, и осью z , равен $\theta = r/L$ (в силу условия $r \ll L$ этот угол много меньше 1). Тогда расстояние $s = L - x'\theta$. Изменением расстояния в знаменателе интеграла можно пренебречь, поэтому получим, подставляя явную зависимость для v при $z = 0$

$$v(r, L) = -\frac{E_0}{i\lambda L} \int dx' dy' \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{w_0^2} - ikL + ikx'\theta\right).$$

Здесь интегралы берутся в бесконечных пределах. Вычисляя их с помощью формулы из условия, получим окончательно

Ответ:

$$v(r, L) = -\frac{\pi E_0 w_0^2}{i\lambda L} e^{-ikL} \exp\left(-\frac{k^2 w_0^2}{4L^2} r^2\right)$$

Отметим, что из полученной формулы следует значение характерной ширины пучка на экране:

$$2w' = 2\frac{2L}{kw_0} = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda L}{w_0} \sim \frac{\lambda L}{w_0},$$

что и предсказывается оценкой пункта A1.

A4 ^{0.70} Теперь рассмотрим случай дифракции Френеля. При этом расстояние L произвольно, однако углы между лучами, идущими к точке наблюдения, и осью z можно считать малыми. Найдите $A(z) = v(0, 0, z) \exp(ikz)$ – комплексную амплитуду на оси Oz без учёта фазы плоской волны. Ответ выразите через E_0 , w_0 , k , z .

В случае дифракции Френеля расстояние s в показателе экспоненты можно разложить до второго порядка, $s = z + r'^2/2z$, где $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, тогда интеграл будет иметь вид

$$v(0, 0, z) = -\frac{E_0}{i\lambda z} \int_0^\infty 2\pi r' dr' \exp\left(-\frac{r'^2}{w_0^2} - ikz - i\frac{kr'^2}{2z}\right) = -\frac{\pi E_0}{i\lambda z} e^{-ikz} \int_0^\infty d(r'^2) \exp\left(-\frac{r'^2}{w_0^2} - i\frac{kr'^2}{2z}\right).$$

Вычисляя интеграл, найдем

$$v(0, 0, z) = -\frac{\pi E_0}{i\lambda z} e^{-ikz} \frac{w_0^2}{1 + ikw_0^2/2z} = E_0 e^{-ikz} \frac{ikw_0^2/2}{z + ikw_0^2/2}.$$

Учитывая $A(z) = v(0, 0, z)e^{ikz}$, получаем ответ.

Ответ:

$$A(z) = E_0 \frac{ikw_0^2/2}{z + ikw_0^2/2}$$

B1 0.30

Подставьте (2) в (1) и получите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $u(x, y, z)$.

Рассчитаем необходимые частные производные $\hat{E}_x$.

$$\frac{\partial \hat{E}_x}{\partial t} = i\omega u \exp(-ikz) \exp(i\omega t), \quad \frac{\partial^2 \hat{E}_x}{\partial t^2} = -\omega^2 u \exp(-ikz) \exp(i\omega t),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \exp(-ikz) \exp(i\omega t), & \frac{\partial^2 \hat{E}_x}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \exp(-ikz) \exp(i\omega t), \\ \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} \exp(-ikz) \exp(i\omega t), & \frac{\partial^2 \hat{E}_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \exp(-ikz) \exp(i\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial z} \exp(-ikz) \exp(i\omega t) - iku \exp(-ikz) \exp(i\omega t), \\ \frac{\partial^2 \hat{E}_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \exp(-ikz) \exp(i\omega t) - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} \exp(-ikz) \exp(i\omega t) - k^2 u \exp(-ikz) \exp(i\omega t). \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в волновое уравнение, сокращая на $\exp(-ikz) \exp(i\omega t)$ и учитывая $\omega^2 = k^2 c^2$, приходим к уравнению

Ответ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

B2 0.50

Покажите, что сумма вторых частных производных u по «поперечным» координатам x, y представима в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = [-2i\chi(z) - \chi^2(z) \cdot r^2] \cdot u.$$

Выразите $\chi(z)$ через $q(z), k$.

Рассчитаем необходимые частные производные u .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{ikx}{q(z)} u, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{ik}{q(z)} u - \frac{k^2 x^2}{q^2(z)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{iky}{q(z)} u, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{ik}{q(z)} u - \frac{k^2 y^2}{q^2(z)}. \end{aligned}$$

Получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[-\frac{2ik}{q(z)} - \frac{k^2}{q^2(z)} r^2 \right] u.$$

Отсюда следует

Ответ:

$$\chi(z) = \frac{k}{q^2(z)}$$

B3 0.30

Покажите, что частная производная u по z представима в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left[\frac{A'(z)}{A(z)} + i\zeta(z) \cdot r^2 \right] \cdot u.$$

Выразите $\zeta(z)$ через $q(z)$, $q'(z)$, k .

Рассчитаем частную производную u по z .

$$\frac{\partial u}{\partial z} = A'(z) \exp\left(-\frac{ikr^2}{2q(z)}\right) + A(z) \frac{ikr^2 q'(z)}{2q^2(z)} \exp\left(-\frac{ikr^2}{2q(z)}\right) = \left[\frac{A'(z)}{A(z)} + \frac{ikr^2 q'(z)}{2q^2(z)}\right] u.$$

Отсюда следует

Ответ:

$$\zeta(z) = \frac{kq'(z)}{2q^2(z)}$$

В4 0.40

Получите дифференциальное уравнение на $q(z)$. Решите его с начальным условием

$$q(0) = iz_0,$$

где z_0 – действительная величина, $z_0 > 0$. Выразите z_0 через w_0 , k .

Используя условие

$$2k\zeta(z) - \chi^2(z) = 0,$$

приходим к дифференциальному уравнению на $q(z)$.

Ответ:

$$q'(z) = 1$$

Решая уравнение с заданным начальным условием, получаем

Ответ:

$$q(z) = iz_0 + z$$

Сравнивая два выражения для $u(r, 0)$

$$u(r, 0) = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) = A(0) \exp\left(-\frac{ikr^2}{2iz_0}\right),$$

получаем

Ответ:

$$z_0 = \frac{kw_0^2}{2}$$

В5 0.20

Выразите $R(z)$ и $w(z)$ через k , z , z_0 .

Находя действительную и мнимую части

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_0} = \frac{z - iz_0}{z^2 + z_0^2},$$

приходим к ответу

Ответ:

$$R(z) = \frac{z^2 + z_0^2}{z}$$
$$w(z) = \sqrt{\frac{2z_0}{k} \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)}$$

B6^{0.40} Проверьте, что найденная в части А функция $A(z)$ действительно удовлетворяет уравнению (5), то есть при ее подстановке слагаемые, не содержащие r^2 , обращаются в 0.

Рассчитаем $A'(z)$.

$$A'(z) = -\frac{E_0 i k w_0^2 / 2}{(z + i k w_0^2 / 2)^2},$$
$$\frac{A'(z)}{A(z)} = -\frac{1}{z + i k w_0^2 / 2} = -\frac{1}{z + i z_0}.$$

Для $\chi(z)$ верно:

$$\chi(z) = \frac{k}{q(z)} = \frac{k}{z + i z_0}.$$

Подставим в уравнение (5):

$$-2ik \frac{A'(z)}{A(z)} - 2i\chi(z) = -2ik \left(-\frac{1}{z + i z_0} + \frac{1}{z + i z_0} \right) = 0.$$

Таким образом, $A(z)$ действительно удовлетворяет уравнению (5).

B7^{0.30} Представим функцию $A(z)$ в виде

$$A(z) = A_0(z) e^{i\psi(z)}$$

с вещественными A_0 и ψ . Выразите A_0 и ψ через z , z_0 , E_0 .

Рассчитав модуль и фазу комплекснозначной функции $A(z)$, приходим к ответу.

Ответ:

$$A_0(z) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}}$$
$$\psi(z) = \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{z_0} \right)$$

C1^{0.50} Найдите распределение интенсивности в пучке $I(r, z)$. Ответ выразите через β , $A_0(z)$, $w(z)$. Изобразите характерный график распределения интенсивности в радиальном направлении при фиксированном z .

В каждой точке пространства зависимость действительного поля от времени $\sim \cos(\omega t + \varphi)$, усреднение даёт

$$\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}.$$

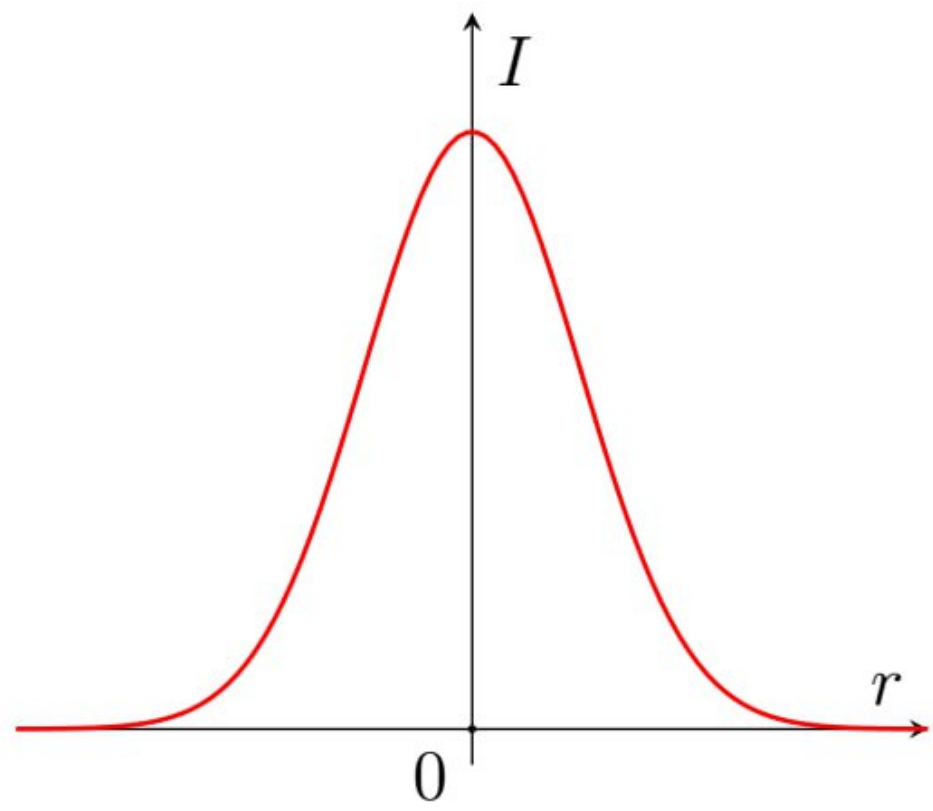
Тогда

$$I(r, z) = \frac{1}{2} \beta |\hat{E}_x|^2 = \frac{1}{2} \beta |u(r, z)|^2 = \frac{1}{2} \beta \left| A(z) \exp \left(-\frac{i k r^2}{2 q(z)} \right) \right|^2 = \frac{1}{2} \beta A_0^2(z) \exp \left(-\frac{2 r^2}{w(z)} \right).$$

Ответ:

$$I(r, z) = \frac{1}{2} \beta A_0^2(z) \exp \left(-\frac{2 r^2}{w(z)} \right)$$

Ответ:



C2^{0.40} Найдите полную мощность излучения P , передаваемого пучком через плоскость $z = \text{const}$. Ответ выразите через β, E_0, k, z_0, z .

По определению

$$dP = I \cdot dS.$$

В силу радиальной симметрии

$$dP = I(r, z) \cdot 2\pi r \, dr,$$
$$P = \int_0^\infty I(r, z) \cdot 2\pi r \, dr.$$

Подставляя $I(r, z)$ из предыдущего пункта и используя выражения для $A_0(z), w(z)$ из части А, получаем ответ.

Ответ:

$$P = \frac{\beta \pi z_0 E_0^2}{2k}$$

Отметим, что P оказывается независимым от z , что согласуется с законом сохранения энергии.

C3^{0.40} Выразите ширину пучка $d(z)$ через $w(z)$. Постройте качественный график зависимости $d(z)$.

Используя результат пункта C1, получаем расстояние от оси Oz до границы пучка:

$$r = w(z).$$

Отсюда диаметр пучка

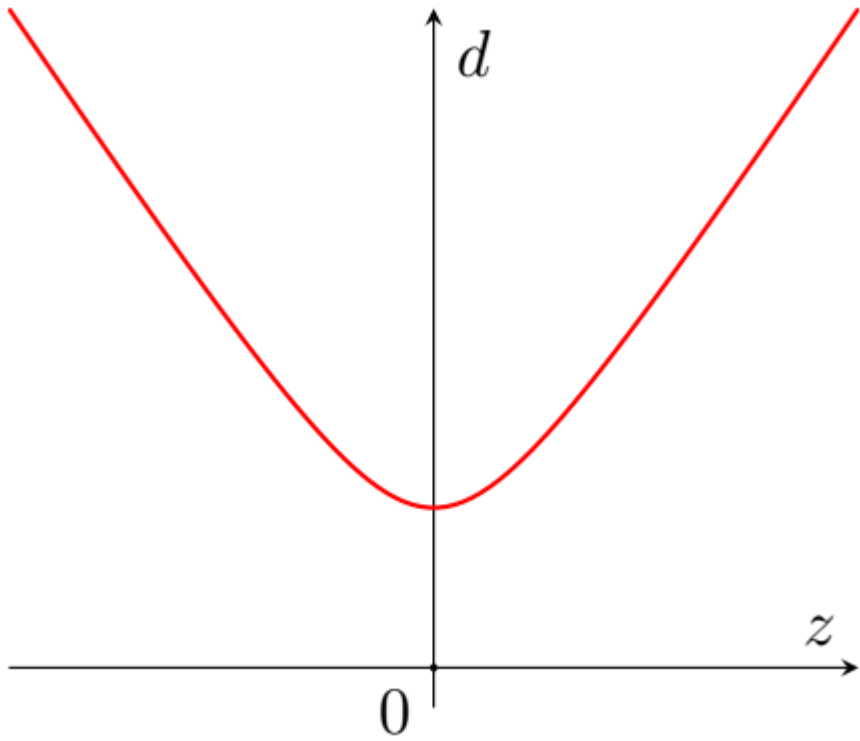
Ответ:

$$d = 2w(z)$$

С учётом выражения для $w(z)$

$$d(z) = \sqrt{\frac{8z_0}{k} \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)}$$

Ответ:



C4^{0.10} Найдите минимальную ширину пучка $d_{\text{п}}$. Ответ выразите через z_0, k . Величина $d_{\text{п}}$ называется **шириной перетяжки**. Плоскость, перпендикулярная Oz , в которой ширина пучка равна ширине перетяжки, называется **плоскостью перетяжки**.

Ответ очевидно следует из предыдущего пункта

Ответ:

$$d_{\text{п}} = \sqrt{\frac{8z_0}{k}}$$

C5^{0.40} Получите уравнение, определяющее форму волнового фронта гауссова пучка, проходящего через заданную точку $(0, z_1)$. В уравнении могут присутствовать $R(z), \psi(z), k, z, z_1$.

Фаза волны в точке (r, z) :

$$\varphi(r, z) = -kz - \frac{kr^2}{2R(z)} + \psi(z).$$

Волновой фронт определяется условием

$$\varphi(r, z) = \varphi(0, z_1).$$

Ответ:

$$kz + \frac{kr^2}{2R(z)} - \psi(z) = kz_1 - \psi(z_1)$$

C6^{0.50} Найдите радиус кривизны фронта $\rho(z_1)$. Ответ выразите через $R(z)$. Постройте график зависимости $\rho(z_1)$, указав на нём характерные особенности и их координаты.

Считая $R(z) \approx R(z_1)$ и $\psi(z) \approx \psi(z_1)$, получим

$$\Delta z = z_1 - z \approx \frac{r^2}{2R(z_1)}.$$

Для волнового фронта сферической волны на расстоянии $\rho(z_1)$ от источника верно

$$\begin{aligned} r^2 + (\rho(z_1) - \Delta z)^2 &= \rho^2(z_1), \\ r^2 - 2\rho(z_1)\Delta z + \Delta z^2 &= 0, \end{aligned}$$

что при $\Delta z \ll \rho(z_1)$ приводит к выражению

$$\Delta z = \frac{r^2}{2\rho(z_1)}.$$

Сравнение двух выражений приводит к ответу

Ответ:

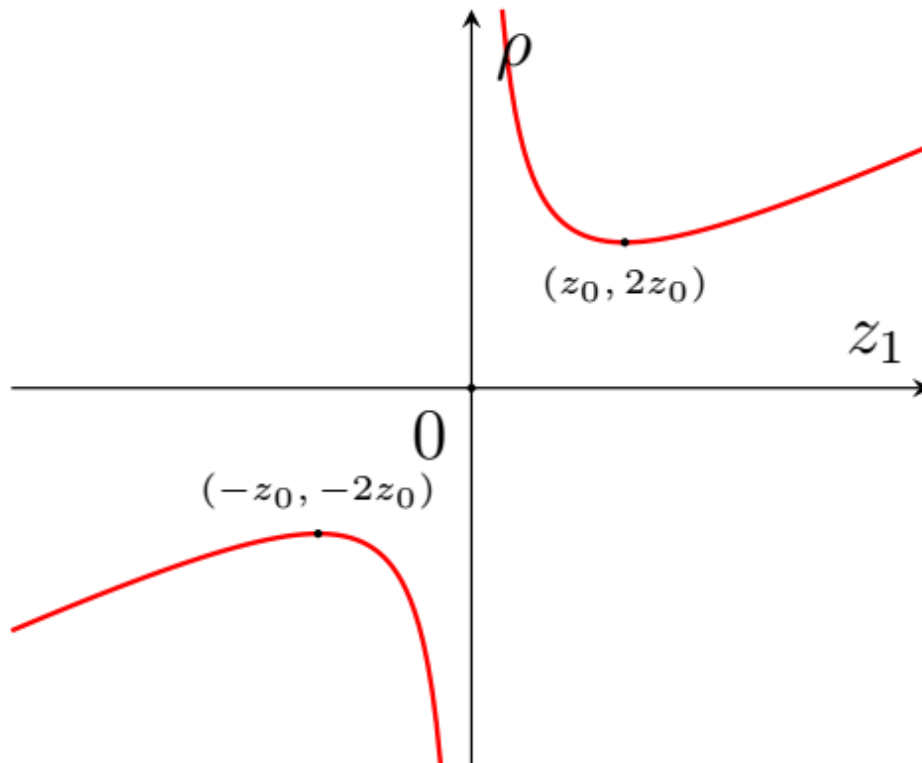
$$\rho(z_1) = R(z_1)$$

С учётом выражения для $R(z_1)$, получим

$$\rho(z_1) = \frac{z_1^2 + z_0^2}{z_1}.$$

У зависимости есть два экстремума: $(z_0, 2z_0)$, $(-z_0, -2z_0)$.

Ответ:



C7^{0.70} Пусть в некоторой точке $z = z_a$ параметры гауссова пучка $R(z_a) = R_a$, $w(z_a) = w_a$. Найдите z_a и диаметр перетяжки пучка $d_{\text{п}}$. Ответ выразите через R_a , w_a , k .

Используя выражения для $R(z)$, $w(z)$, запишем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} w_a^2 = \frac{2}{k} \left(z_0 + \frac{z_a^2}{z_0} \right) \\ R_a = z_a + \frac{z_0^2}{z_a} \end{cases}$$

Деление первого уравнения на второе даёт

$$\frac{w_a^2}{R_a} = \frac{2z_a}{kz_0} \Rightarrow \frac{z_a}{z_0} = \frac{k w_a^2}{2 R_a}.$$

Подставим отношение $\frac{z_a}{z_0}$ во второе уравнение:

$$R_a = z_a \left(1 + \left(\frac{2 R_a}{k w_a^2} \right)^2 \right).$$

Отсюда следует ответ для z_a . Затем из найденного ранее отношения $\frac{z_a}{z_0}$ находится z_0 и с учётом пункта C4 пересчитывается в $d_{\text{п}}$.

Ответ:

$$z_a = \frac{R_a}{1 + \left(\frac{2 R_a}{k w_a^2} \right)^2}$$

$$d_{\text{п}} = \frac{2 w_a}{\sqrt{1 + \left(\frac{k w_a^2}{2 R_a} \right)^2}}$$

C8^{1.00} Пусть гауссов пучок с длиной волны $\lambda_0 = 10.6$ мкм имеет ширину $d_1 = 3.398$ мм и $d_2 = 6.760$ мм в двух точках, расстояние между которыми $L = 10$ см. **Численно** рассчитайте ширину перетяжки пучка $d_{\text{п}}$.

Используя выражение для $d(z)$, полученное в пункте СЗ, запишем уравнения:

$$\begin{cases} d_1^2 = \frac{8z_0}{k} \left(1 + \frac{(z \mp L/2)^2}{z_0^2} \right) \\ d_2^2 = \frac{8z_0}{k} \left(1 + \frac{(z \pm L/2)^2}{z_0^2} \right) \end{cases}$$

Здесь z – координата точки, расположенной посередине между двумя данными в условии. Уравнения записываются неоднозначно ($\pm$), так как условием не дано относительное расположение описываемых точек, т. е. какая из них имеет большую координату z . Преобразуем уравнения:

$$\begin{cases} (z \mp L/2)^2 = z_0^2 \left(\frac{kd_1^2}{8z_0} - 1 \right) \\ (z \pm L/2)^2 = z_0^2 \left(\frac{kd_2^2}{8z_0} - 1 \right) \end{cases}$$

Для избавления от неизвестной z извлечём корень из обеих частей уравнений и вычтем получившиеся уравнения друг из друга. Отметим, что при взятии корня снова возникает неоднозначность ($A^2 = B \Rightarrow A = \pm\sqrt{B}$). Учёт условия $d_2 > d_1$ и очевидных математических фактов (например, что сумма корней из положительных чисел положительна) приводит к совокупности всего из двух уравнений, что соответствует двум описанным ранее случаям взаимного расположения описываемых точек.

$$\sqrt{\frac{\pi d_2^2}{4\lambda z_0} - 1} \pm \sqrt{\frac{\pi d_1^2}{4\lambda z_0} - 1} = \frac{L}{z_0}.$$

Данные уравнения относительно переменной z_0 могут быть решены численно методом итераций, с помощью таблиц и иными доступными способами.

$$z_{01} = 0.131 \text{ см}, \quad z_{02} = 1.186 \text{ см}.$$

Пересчитываем значения z_0 в d_{π} .

Ответ:

$$d_{\pi} = 0.13 \text{ мм} \quad \text{или} \quad d_{\pi} = 0.40 \text{ мм}$$

Отметим, что уравнения на z_0 могут также быть решены явно, однако это требует гораздо больших вычислительных и временных затрат. Явное выражение:

$$z_0 = \frac{d_1^2 + d_2^2 \pm \sqrt{(d_1^2 + d_2^2)^2 - \frac{16L^2\lambda^2}{\pi^2}(1 + \alpha^2)}}{\frac{8\lambda}{\pi}(1 + \alpha^2)},$$

где $\alpha = \frac{\pi}{4\lambda L}(d_2^2 - d_1^2)$.

D1^{0.70}

Известно, что линза изменяет фазу падающей волны таким образом, что все лучи приходят в фокус с одинаковой фазой. Используя этот факт, выразите коэффициент η через k , f .

Пусть один луч выходит из линзы на расстоянии r от оси Oz , второй проходит по оси z . Тогда при $r \ll f$ разность хода между ними составит

$$\delta \approx \frac{r^2}{2f}.$$

Разность фаз первого и второго луча

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -k\delta.$$

Знак «минус» появляется, так как исходная волна выбрана с множителем $\exp(-ikz)$, и второй луч, идущий вдоль Oz , проходит больший оптический путь, чем первый. Условие синфазности запишется в виде:

$$-k\frac{r^2}{2f} + \eta r^2 = 0,$$

что приводит к ответу

Ответ:

$$\eta = \frac{k}{2f}$$

D2^{0.50}

Пусть на тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием f падает гауссов пучок, распространяющийся вдоль Oz . Плоскость линзы перпендикулярна оси Oz . Непосредственно перед линзой параметры пучка $R(z_{\text{л}}) = R_1$, $w(z_{\text{л}}) = w_1$. Известно, что после линзы он также останется гауссовым. Найдите параметры пучка R_2 , w_2 непосредственно после прохождения через линзу. Диаметр линзы много больше w_1 .

Так как пучок остаётся гауссов, распределение амплитуды поля в плоскости линзы до и после её прохождения могут быть записаны в виде

$$u_1 = u_0 \exp\left(-\frac{ikr^2}{2R_1} - \frac{r^2}{w_1^2}\right),$$

$$u_2 = u_0' \exp\left(-\frac{ikr^2}{2R_2} - \frac{r^2}{w_2^2}\right).$$

С другой стороны, с учётом предыдущего пункта

$$u_2 = u_1 \exp\left(\frac{ikr^2}{2f}\right) = u_0 \exp\left(-\frac{ikr^2}{2R_1} + \frac{ikr^2}{2f} - \frac{r^2}{w_1^2}\right).$$

Сравнивая действительную и мнимую часть коэффициента перед r^2 в двух полученных выражениях для u_2 , получаем ответ.

Ответ:

$$R_2 = \frac{R_1 f}{f - R_1}$$

$$w_2 = w_1$$

ДЗ^{0.40}
Найдите условие, связывающее R_1 , w_1 и f , при котором гауссов пучок сфокусируется за линзой, то есть его плоскость перетяжки будет расположена после линзы.

Очевидно, что плоскость перетяжки будет расположена после линзы, если $R_2 < 0$. То же следует, например, из пунктов С3 или С7. С учётом формулы для R_2 , это приводит к условию

Ответ:

$$f < R_1$$