

A1 0.50 Выразите $\ddot{\vec{r}}$ и $\dot{\vec{\omega}}$ через $\vec{F}$, m , β , $\vec{a}$.

Запишем второй закон Ньютона:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}.$$

Шар не движется в вертикальном направлении, поэтому $m\vec{g} + \vec{N} = 0$. Получаем:

Ответ:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Второй ответ следует из закона изменения момента импульса относительно центра шара:

Ответ:

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{[\vec{a}, \vec{F}]}{\beta m a^2}$$

A2 0.30 Запишите условие кинематической связи. Выразите ответ через $\dot{\vec{r}}$, $\vec{a}$, $\vec{r}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$.

Скорости стола и шара в точке их касания должны совпадать, поэтому:

Ответ:

$$[\vec{\Omega}, \vec{r}] = \dot{\vec{r}} + [\vec{\omega}, \vec{a}]$$

A3 0.70 Выразите $\ddot{\vec{r}}$ через β , $\dot{\vec{r}}$ и $\vec{\Omega}$.

Выразим $\vec{F}$ из уравнения на $\dot{\vec{\omega}}$, домножив его векторно на $\vec{a}$:

$$\begin{aligned} \beta m a^2 [\dot{\vec{\omega}}, \vec{a}] &= [[\vec{a}, \vec{F}], \vec{a}] = [\vec{a}, [\vec{F}, \vec{a}]] = a^2 \vec{F}. \\ \vec{F} &= \beta m [\dot{\vec{\omega}}, \vec{a}]. \end{aligned}$$

Выразим через заданные величины, продифференцировав кинематическую связь:

$$\begin{aligned} [\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}] &= \ddot{\vec{r}} + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{a}]. \\ \vec{F} = \beta m [\dot{\vec{\omega}}, \vec{a}] &= \beta m ([\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}] - \ddot{\vec{r}}). \end{aligned}$$

Подставляем полученное выражение и получаем ответ:

Ответ:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\beta}{1 + \beta} [\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}]$$

A4 0.70 Пусть изначально положение и скорость шара были $\vec{r}_0$ и $\vec{v}_0$ соответственно. Определите, как $\dot{\vec{r}}$ зависит от $\vec{r}$ при дальнейшем движении. Качественно изобразите траекторию движения центра шара в этом случае и укажите характерные размеры и координаты.

Заметим, что выражение, полученное в прошлом пункте является равенством двух полных производных по времени:

$$\frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \frac{\beta}{1 + \beta} [\vec{\Omega}, \vec{r}].$$

Проинтегрировав это соотношение с учётом того, что скорость центра шара всегда параллельна плоскости стола:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\beta}{1 + \beta} [\vec{\Omega}, \vec{r} - \vec{R}_0],$$

где $\vec{R}_0$ - постоянный вектор. Заметим, что это уравнение задаёт движение по окружности с центром $\vec{R}_0$. Теперь подставим начальные условия. Тогда интегрирование ускорения нам даст:

Ответ:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\beta}{1+\beta} \left[\vec{\Omega}, \vec{r} - \vec{r}_0 \right] + \vec{v}_0$$

Как мы уже увидели, траектория - окружность. Осталось найти её центр и радиус.

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\beta}{1+\beta} \left[\vec{\Omega}, \vec{r} - \vec{R}_0 \right] = \frac{\beta}{1+\beta} \left[\vec{\Omega}, \vec{r} - \vec{r}_0 \right] + \vec{v}_0$$

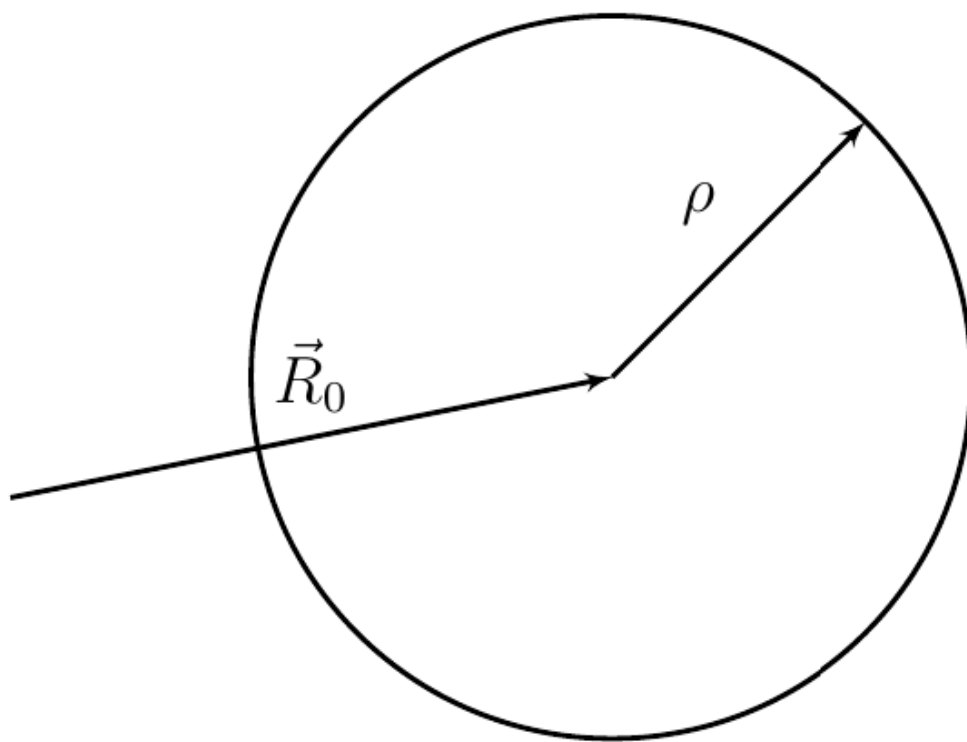
Домножим векторно на $\vec{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{1+\beta} \left[\vec{\Omega}, \left[\vec{\Omega}, \vec{r} - \vec{R}_0 \right] \right] &= \frac{\beta}{1+\beta} \left[\vec{\Omega}, \left[\vec{\Omega}, \vec{r} - \vec{r}_0 \right] \right] + \left[\vec{\Omega}, \vec{v}_0 \right]. \\ \frac{\beta}{1+\beta} \left[\vec{\Omega}, \left[\vec{\Omega}, \vec{r}_0 - \vec{R}_0 \right] \right] &= \frac{\beta \Omega^2}{1+\beta} \left(\vec{R}_0 - \vec{r}_0 \right) = \left[\vec{\Omega}, \vec{v}_0 \right] \\ \vec{R}_0 - \vec{r}_0 &= \frac{1+\beta}{\Omega^2 \beta} \left[\vec{\Omega}, \vec{v}_0 \right] \end{aligned}$$

Из полученного соотношения сразу получаем центр и радиус окружности:

$$\vec{R}_0 = \vec{r}_0 + \frac{1+\beta}{\Omega^2 \beta} \left[\vec{\Omega}, \vec{v}_0 \right], \quad \rho = \frac{(1+\beta) v_0}{\Omega \beta}.$$

Ответ:



В1 0.30 Выразите $\ddot{\vec{r}}$ через $\vec{g}_{\parallel}$, β , $\dot{\vec{r}}$ и $\vec{\Omega}$.

Отличие от прошлой части есть только в том, что в начальном выражении для $\ddot{\vec{r}}$ будет отличный от нуля вклад $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{g}_{\parallel}$.

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g}_{\parallel} + \beta \left(\left[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}} \right] - \ddot{\vec{r}} \right)$$

Ответ:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{g}_{\parallel}}{1+\beta} + \frac{\beta}{1+\beta} \left[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}} \right]$$

В2 1.40 Обозначим

$$\vec{u} = \frac{\left[\vec{\Omega} \times \vec{g}_{\parallel} \right]}{\Omega^2}.$$

Качественно изобразите траектории центра шара при следующих начальных скоростях:

1. $\vec{v}_0 = \vec{u}$
2. $\vec{v}_0 = 2.5\vec{u}$
3. $\vec{v}_0 = 5\vec{u}$
4. $\vec{v}_0 = 0$

Для случая 4 рассчитайте численно характерные размеры траектории для $g_{\parallel} = 1.0 \text{ м/с}^2$, $\Omega = 10 \text{ рад/с}$.

Проанализируем ответ прошлого пункта. Ускорение складывается из постоянного слагаемого и слагаемого, получаемого векторным произведением скорости и постоянного вектора. Это полностью аналогично движению в скрещенных магнитном и электрическом поле. Найдём скорость дрейфа $\dot{\vec{r}} = \vec{v} + \vec{v}_d$.

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\vec{g}_{\parallel}}{1 + \beta} + \frac{\beta}{1 + \beta} [\vec{\Omega}, \vec{v}] + \frac{\beta}{1 + \beta} [\vec{\Omega}, \vec{v}_d]$$
$$0 = \frac{\vec{g}_{\parallel}}{1 + \beta} + \frac{\beta}{1 + \beta} [\vec{\Omega}, \vec{v}_d]$$

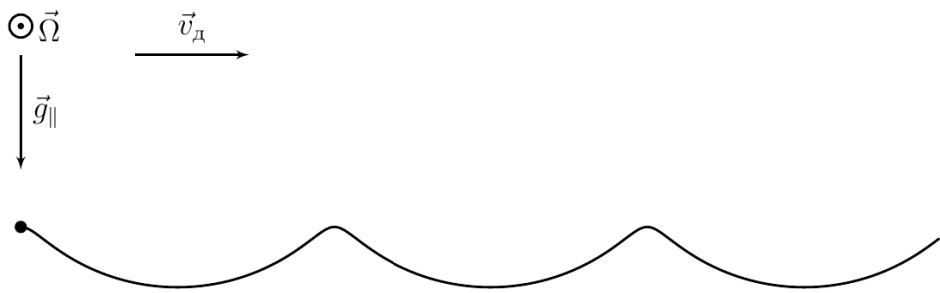
Векторно домножив на $\vec{\Omega}$, получаем значение скорости дрейфа:

$$\vec{v}_d = \frac{[\vec{\Omega}, \vec{g}_{\parallel}]}{\Omega^2 \beta} = \frac{5}{2} \vec{u}.$$

Вектор $\vec{v}$ вращается с постоянной угловой скоростью $\beta \vec{\Omega} / (1 + \beta)$. Используя полученные выражения, получаем вид траектории для каждого из случаев.

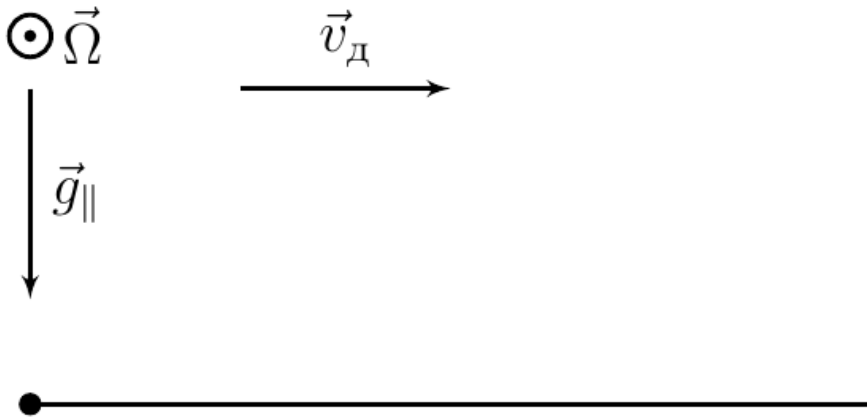
Ответ: **1 случай:** отличие от скорости дрейфа мало, поэтому будет траектория без самопересечений.

Ответ:



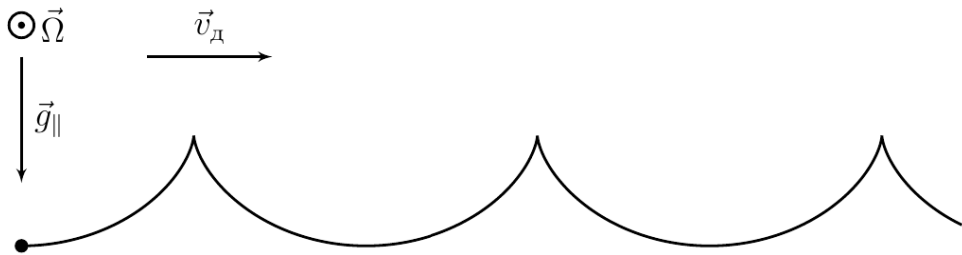
Ответ: **2 случай:** начальная скорость совпадает со скоростью дрейфа, поэтому будет движение по прямой

Ответ:



Ответ: **3 случай:** отличие от скорости дрейфа равно скорости дрейфа, поэтому будет движение по циклоиде.

Ответ:



Ответ: **4 случай:** аналогично прошлому случаю будет движение по циклоиде. Найдём характерные размеры траектории. Введём координаты x и y в направлениях $\vec{v}_d$ и $-\vec{g}_{\parallel}$ соответственно. Тогда в момент времени t скорости

равны:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2.5 \frac{g_{\parallel}}{\Omega} \left(1 - \cos\left(\frac{2}{7}\Omega t\right) \right), \\ \dot{y} = -2.5 \frac{g_{\parallel}}{\Omega} \sin\left(\frac{2}{7}\Omega t\right). \end{cases}$$

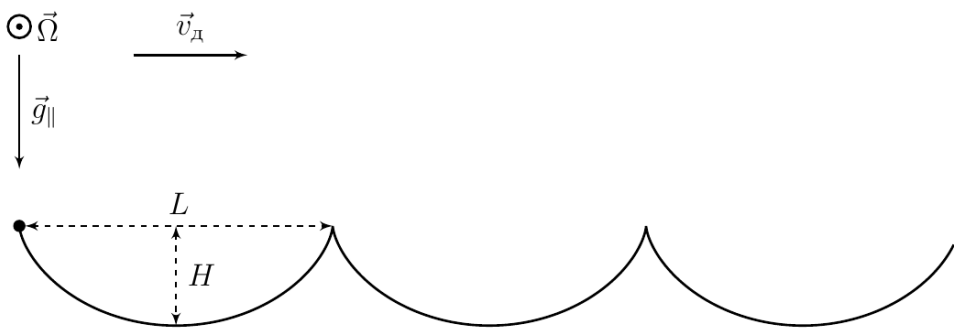
Параметрическое уравнение траектории:

$$\begin{cases} x = \frac{5g_{\parallel}t}{2\Omega} - \frac{35g_{\parallel}}{4\Omega^2} \sin\left(\frac{2}{7}\Omega t\right), \\ y = -\frac{35g_{\parallel}}{4\Omega^2} \left(1 - \cos\left(\frac{2}{7}\Omega t\right) \right). \end{cases}$$

Высота циклоиды и её период:

$$H = \frac{35g_{\parallel}}{2\Omega^2} = 17.5 \text{ см}, \quad L = \pi H = 55.0 \text{ см}.$$

Ответ:



С1^{0.20}

Выразите $\ddot{\vec{r}}$ через $m, \beta, \vec{a}, \vec{r}, \vec{N}, \vec{g}, \dot{\vec{\omega}}$

Из второго закона Ньютона:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{N}}{m} + \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m}.$$

Из закона изменения момента импульса:

$$ma^2\beta\dot{\vec{\omega}} = [\vec{a} \times \vec{F}] \quad \Rightarrow \quad ma^2\beta[\vec{a} \times \dot{\vec{\omega}}] = [\vec{a} \times [\vec{a} \times \vec{F}]] = \vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{F}) - \vec{F}a^2 = -\vec{F}a^2.$$

Откуда:

Ответ:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{N}}{m} + \vec{g} - [\vec{a} \times \dot{\vec{\omega}}] \beta$$

С2^{0.40}

Запишите условие кинематической связи. Выразите ответ через $\dot{\vec{r}}, \vec{a}, \vec{r}, \vec{\omega}, \vec{\Omega}$.

Скорости стола и шара в точке их касания должны совпадать, поэтому:

$$\dot{\vec{r}} + [\vec{\omega} \times \vec{a}] = [\vec{\Omega} \times (\vec{r} + \vec{a})],$$

откуда:

Ответ:

$$\dot{\vec{r}} = [\vec{\Omega} \times (\vec{r} + \vec{a})] - [\vec{\omega} \times \vec{a}]$$

С3^{0.90}

Выразите $\ddot{\vec{r}}$ через $m, \beta, \vec{a}, \vec{N}, \vec{g}, \dot{\vec{r}}, \vec{\Omega}, \vec{\zeta}, \vec{\omega}$.

Продифференцируем выражение для $\dot{\vec{r}}$ по времени:

$$\ddot{\vec{r}} = \left[\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} \right] + \left[\vec{\Omega} \times \dot{\vec{a}} \right] - [\dot{\vec{\omega}} \times \vec{a}] - [\vec{\omega} \times \dot{\vec{a}}]$$

Из выражения для $\ddot{\vec{r}}$, полученного в пункте C1:

$$[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{a}] = \frac{1}{\beta} \left(\ddot{\vec{r}} - \frac{\vec{N}}{m} - \vec{g} \right)$$

Также:

$$\dot{\vec{a}} = \left[\vec{\zeta} \times \vec{a} \right],$$

откуда:

Ответ:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{[\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}]}{1 + \beta^{-1}} + \frac{1}{1 + \beta} \left(\frac{\vec{N}}{m} + \vec{g} \right) + \frac{1}{1 + \beta^{-1}} \left[(\vec{\Omega} - \vec{\omega}) \times [\vec{\zeta} \times \vec{a}] \right]$$

Посмотрим, как преобразуется эта формула с учётом некоторых приближений, а именно:

- $\theta \ll 1$, то есть стол слабо отличается от плоского и влияние гравитации слабо;
- движение шара финитно, то есть он движется в ограниченной области пространства около вершины и не удаляется на бесконечность;
- $a \lesssim r$, то есть шар не слишком близок к вершине конуса;
- $\zeta \lesssim \Omega$, то есть вращение стола происходит достаточно быстро в сравнении со скоростью движения шара;
- $|(\vec{\omega}, \vec{a})| \lesssim \Omega r$, то есть скорость вращения не слишком велика.

Ограничимся слагаемыми порядка малости θ .

Заметим, что слагаемые с $\vec{N}$ и $\vec{g}$ имеют порядок малости θ , так как такого порядка проекция $\vec{g}$ на поверхность конуса. В силу того, что движение финитно, остальные слагаемые должны быть такого же порядка. Теперь осталось показать, что первое слагаемое на порядок больше последнего, тогда первое имеет первый порядок малости, а последнее - второй, и его можно отбросить.

Оценка величины первого слагаемого:

$$\left| \beta \frac{[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}]}{1 + \beta} \right| \sim |[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}]| \sim \Omega \dot{r} + \Omega \zeta r.$$

Теперь последнее слагаемое разложим на два слагаемых и проанализируем каждое из них с учётом того, что угол между $\vec{\zeta}$ и $\vec{a}$ равен θ :

$$\left| \frac{\beta}{1 + \beta} [\vec{\Omega}, [\vec{\zeta}, \vec{a}]] \right| \sim \Omega \zeta a \theta \lesssim \Omega \zeta r \theta \ll \Omega \zeta r \lesssim \left| \beta \frac{[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}]}{1 + \beta} \right|.$$

Для оценки второго слагаемого разложим $\vec{\omega}$ на компоненты вдоль и перпендикулярно $\vec{a}$: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_a + \vec{\omega}_\perp$. Заметим, что из кинетической связи и последнего условия приближения:

$$\omega a \lesssim |\dot{\vec{r}}| + \Omega r + |(\vec{\omega}, \vec{a})| \sim \dot{r} + \Omega r.$$

Таким образом последнее выражение, малость которого надо доказать:

$$\left| \frac{\beta}{1 + \beta} [\vec{\omega}, [\vec{\zeta}, \vec{a}]] \right| \sim \omega \zeta a \theta \lesssim (\dot{r} + \Omega r) \zeta \theta \ll \Omega \dot{r} + \Omega \zeta r \sim \left| \beta \frac{[\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}]}{1 + \beta} \right|.$$

Таким образом получаем нужную приближённую формулу.

C4^{1.00}

Докажите, что в рассматриваемом приближении сохраняется величина:

$$l = r^2 \left(\zeta - \frac{\Omega \beta}{2(1 + \beta)} \right).$$

Здесь $\zeta = |\vec{\zeta}|$.

Первое решение.

Разложим по введённому базису слагаемые из данного уравнения:

$$\dot{\vec{r}} = \left[\vec{\zeta} \times \vec{r} \right] + \dot{r} \vec{e}_r = \zeta r \vec{e}_\varphi + \dot{r} \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \left(\dot{\zeta} r \vec{e}_\varphi + \zeta \dot{r} \vec{e}_\varphi + \zeta r \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \right) + \left(\ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right) = \\ &= \dot{\zeta} r \vec{e}_\varphi + \zeta \dot{r} \vec{e}_\varphi + \zeta^2 r (-\vec{e}_r - \theta \vec{e}_z) + \ddot{r} \vec{e}_r + \zeta \dot{r} \vec{e}_\varphi = \left(\dot{\zeta} r + 2\zeta \dot{r} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\ddot{r} - \zeta^2 r \right) \vec{e}_r + \zeta^2 r \theta \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\left[\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}\right] = \Omega \dot{r} \vec{e}_\varphi - \Omega \zeta r \vec{e}_r + \Omega \zeta r \theta \vec{e}_z$$

$$\frac{\vec{N}}{m} + \vec{g} = g\theta \vec{e}_r + \left(\frac{N_z}{m} - g\right) \vec{e}_z$$

Теперь подставим их в данное уравнение, взяв проекции на $\vec{e}_\varphi$:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} r + 2\zeta \dot{r} &= \frac{\Omega \dot{r}}{1 + \beta^{-1}} \Rightarrow \frac{d\zeta}{dr} = \frac{1}{r} \left(\frac{\Omega}{1 + \beta^{-1}} - 2\zeta \right) \Rightarrow \\ \int \frac{\frac{d\zeta}{dr}}{\frac{\Omega}{1 + \beta^{-1}} - 2\zeta} &= \int \frac{dr}{r} \Rightarrow r^2 \left(\zeta - \frac{\Omega \beta}{2(1 + \beta)} \right) = \text{const}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Второе решение.

Рассмотрим изменение момента импульса центра масс:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}, \dot{\vec{r}}] = [\vec{r}, \ddot{\vec{r}}].$$

Для проекции на ось z :

$$\frac{d}{dt} (\vec{e}_z, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{d}{dt} (r^2 \zeta) = (\vec{e}_z, \vec{r}, \ddot{\vec{r}}).$$

Заметим, что $(\vec{e}_z, \vec{r}, \vec{N})$ и $(\vec{e}_z, \vec{r}, \vec{g})$ равны нулю, так как эти тройки векторов лежат в одной плоскости, поэтому от ускорения останется только одно слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (r^2 \zeta) &= \frac{\beta}{1 + \beta} (\vec{e}_z, \vec{r}, [\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}]) = \frac{\beta}{1 + \beta} (\vec{e}_z, \vec{\Omega} (\vec{r}, \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} (\vec{\Omega}, \vec{r})) . \\ \frac{d}{dt} (r^2 \zeta) &= \frac{\beta}{1 + \beta} ((\vec{e}_z, \vec{\Omega}) (\vec{r}, \dot{\vec{r}}) - (\vec{e}_z, \dot{\vec{r}}) (\vec{\Omega}, \vec{r})) \end{aligned}$$

Подставим значения скальных произведений и отбросим слагаемые второго порядка малости:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (r^2 \zeta) &= \frac{\beta}{1 + \beta} \left(\Omega \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{2} \right) - r \dot{r} \Omega \theta^2 \right) \approx \frac{\beta \Omega}{1 + \beta} \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{2} \right) . \\ \frac{d}{dt} \left(r^2 \left(\zeta - \frac{\Omega \beta}{2(1 + \beta)} \right) \right) &= 0 \end{aligned}$$

Получили, что величина l сохраняется.

C5^{0.50}

Выразите $\ddot{r}$ через r , ζ , β , Ω , θ и g .

Теперь рассмотрим уравнение:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{1 + \beta} \left(\vec{g} + \frac{\vec{N}}{m} \right) + \frac{\beta}{1 + \beta} \left[\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} \right].$$

Подставим в него проекции слагаемых на $\vec{e}_r$:

$$\ddot{r} - \zeta^2 r = \frac{g\theta}{1 + \beta} - \frac{\beta \Omega \zeta r}{1 + \beta} \Rightarrow \ddot{r} = \zeta^2 r + \frac{g\theta}{1 + \beta} - \frac{\beta \Omega \zeta r}{1 + \beta}.$$

Ответ:

$$\ddot{r} = \zeta^2 r + \frac{g\theta}{1 + \beta} - \frac{\beta \Omega \zeta r}{1 + \beta}$$

C6^{0.70}

Определите, при каких значениях r возможно движение по круговым траекториям вокруг оси симметрии конуса ($r = \text{const}$) и определите значения ζ , соответствующее такому движению. Выразите ответ через r , β , Ω , θ и g .

$$r = \text{const} \Rightarrow \ddot{r} = 0 = \zeta^2 r + \frac{g\theta}{1 + \beta} - \frac{\beta \Omega \zeta r}{1 + \beta}.$$

Тогда получаем квадратное уравнение относительно ζ :

$$\zeta^2 - \zeta \cdot \frac{\Omega}{1 + \beta^{-1}} + \frac{g\theta}{(1 + \beta)r} = 0 \Rightarrow \zeta_{1,2} = \frac{\Omega}{2(1 + \beta^{-1})} \pm \sqrt{\left(\frac{\Omega}{2(1 + \beta^{-1})} \right)^2 - \frac{g\theta}{(1 + \beta)r}}.$$

Так как подкоренное выражение не отрицательно:

$$r \geq \frac{4g\theta(1+\beta)}{\Omega^2\beta^2} = r_{\min}.$$

Ответ:

$$\zeta_{1,2} = \frac{\Omega}{2(1+\beta^{-1})} \pm \sqrt{\left(\frac{\Omega}{2(1+\beta^{-1})}\right)^2 - \frac{g\theta}{(1+\beta)r}}$$

$$r \geq \frac{4g\theta(1+\beta)}{\Omega^2\beta^2}$$

С7^{0.80}

Выразите $\dot{r}^2$ с точностью до произвольной постоянной через l, r, g, β, Ω и θ . Качественно изобразите вид фазовых диаграмм $\dot{r}(r)$.

Легко увидеть, что:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr/\dot{r}} = \frac{d(\dot{r}^2)}{2dr} \quad \Rightarrow \quad \dot{r}^2 = 2 \int \ddot{r}(r)dr.$$

Мы знаем, что сохраняется величина l , следовательно:

$$\zeta(r) = \frac{\Omega\beta}{2(1+\beta)} + \frac{l}{r^2}.$$

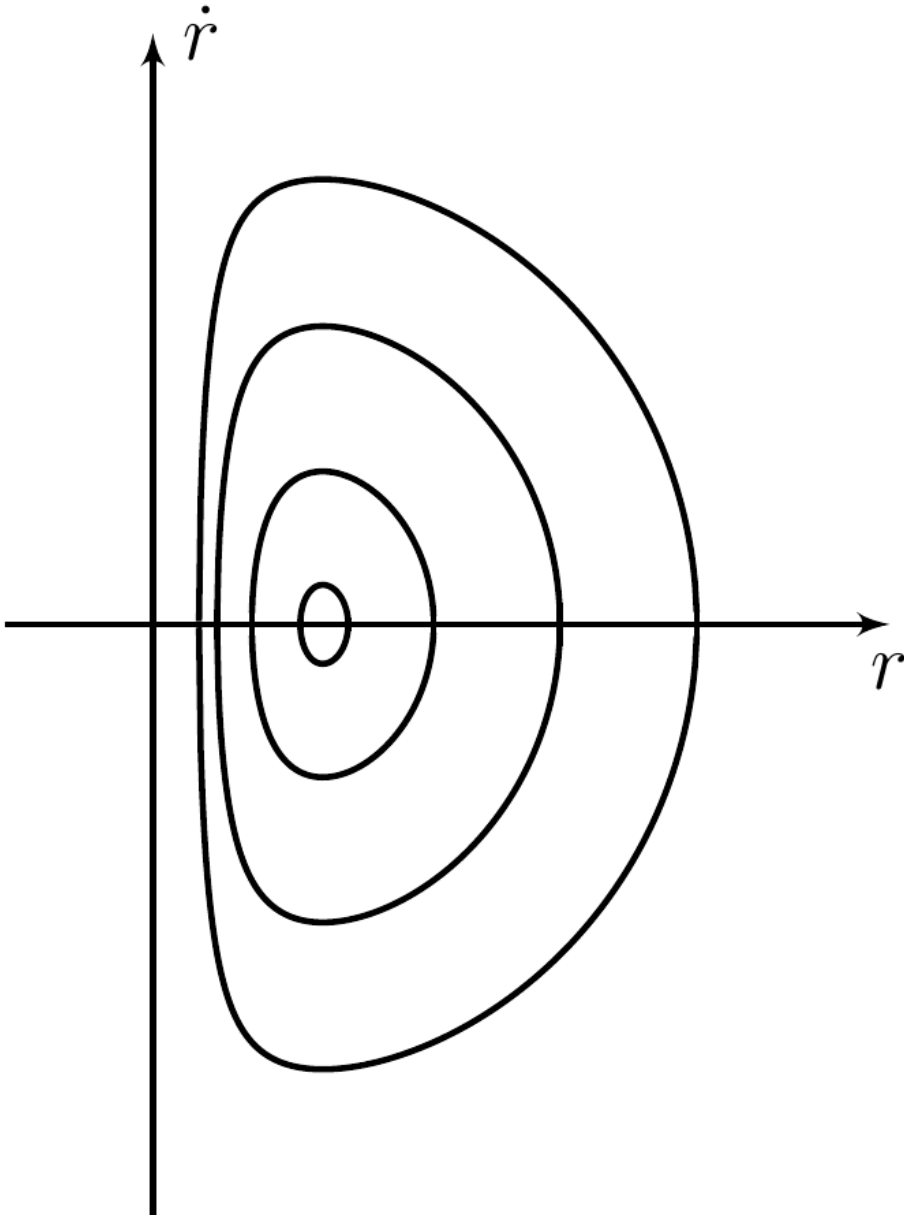
Подставляя ζ в выражение для $\ddot{r}$, получим:

$$\dot{r}^2 = 2 \int \left(\frac{g\theta}{1+\beta} + \frac{l^2}{r^3} - \frac{\Omega^2 r}{4(1+\beta^{-1})^2} \right) dr = \frac{2g\theta r}{1+\beta} - \frac{\Omega^2 r^2}{4(1+\beta^{-1})^2} - \frac{l^2}{r^2} + \text{const}.$$

Ответ:

$$\dot{r}^2 = \frac{2g\theta r}{1+\beta} - \frac{\Omega^2 r^2}{4(1+\beta^{-1})^2} - \frac{l^2}{r^2} + \text{const}$$

Ответ:



С8^{0.40} Рассмотрим малое возмущение круговой орбиты с радиусом r_0 . Определите циклическую частоту ξ малых радиальных колебаний. Выразите ответ через $\Omega, r_0, \theta, g, \beta$.

Орбиту возмутили так, что расстояние от оси до центра шара представило в виде:

$$r(t) = r_0 + \delta(t), \text{ (где } \delta \ll r_0 \text{ и } \langle r \rangle = r_0 \text{)}.$$

Тогда:

$$\ddot{\delta} = -\xi^2 \delta = \ddot{r}(r_0) = \frac{2g\theta}{1+\beta} + \frac{l^2}{r_0^3} - \frac{\Omega^2 r}{4(1+\beta^{-1})^2} \approx -\frac{3l^2 \delta}{r_0^4} - \frac{\Omega^2 \delta}{4(1+\beta^{-1})^2},$$

откуда:

$$\xi = \sqrt{\frac{3l^2}{r_0^4} + \frac{\Omega^2}{4(1+\beta^{-1})^2}},$$

где:

$$l = r_0^2 \left(\zeta(r_0) - \frac{\Omega}{2(1+\beta^{-1})} \right) = \pm r_0^2 \sqrt{\frac{\Omega^2}{4(1+\beta^{-1})^2} - \frac{g\theta}{(1+\beta)r_0}}.$$

Подставляя l в выражение для ξ , получаем:

Ответ:

$$\xi = \sqrt{\frac{\Omega^2}{(1+\beta^{-1})^2} - \frac{3g\theta}{(1+\beta)r_0}}$$

С9^{1.20} Пусть шар изначально движется с $\dot{\varphi} = \zeta_0 = 0.44$ рад/с, $\dot{r} = 0$, $r_0 = 15$ см по конусу с $\theta = 1^\circ$ и $\Omega = 10$ рад/с. Изобразите вид траектории и укажите её характерные размеры. Известно, что $g = 9.81$ м/с².

Примечание: можете считать известным, что отклонение от круговой орбиты в этом случае мало, поэтому зависимость $\ddot{r}(r)$ и $\dot{\varphi}(r)$ можно приближать линейной функцией вблизи СРЕДНЕГО значения r .

Найдём значение l по данным величинам:

$$l = -0.022243 \text{ м}^2/\text{с}.$$

В начальный момент времени $\ddot{r}$:

$$\ddot{r}(0) = \frac{2g\theta}{1+\beta} + \frac{l^2}{r_0^3} - \frac{\beta^2 \Omega^2 r_0}{4(1+\beta)^2} = -0.037232 \text{ м/с}^2.$$

Получается, что в начальный момент времени r максимально. Найдём амплитуду колебаний A . Заметим, что среднее значение радиус-вектора будет $r_0 - A$.

$$\begin{aligned} 0.037232 \text{ м/с}^2 &= \xi^2 A \\ \xi^2 &= \frac{3l^2}{(r_0 - A)^4} + \frac{\beta^2 \Omega^2}{4(1+\beta)^2} \end{aligned}$$

Получили уравнение на A :

$$0.037232 \text{ м/с}^2 = \left(\frac{3l^2}{(r_0 - A)^4} + \frac{\beta^2 \Omega^2}{4(1+\beta)^2} \right) A.$$

Заметим, что в правой части монотонная по A функция, поэтому решение единственно. Найдём его численно:

$$A = 6.6961 \text{ мм}.$$

Найдём ξ и среднее значение ζ :

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{\frac{3l^2}{(r_0 - A)^4} + \frac{\beta^2 \Omega^2}{4(1+\beta)^2}} = 2.3580 \text{ с}^{-1}, \\ \langle \zeta \rangle &= \frac{\Omega \beta}{2(1+\beta)} + \frac{l}{(r_0 - A)^2} = 0.34545 \text{ рад/с}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения движения:

$$\begin{cases} r = r_0 - A + A \cos(\xi t), \\ \zeta = \langle \zeta \rangle + (\zeta_0 - \langle \zeta \rangle) \cos(\xi t). \end{cases}$$

Стоит отметить, что крайне важно учитывать, что среднее значение ζ не совпадает с начальным, так как разница этих значений очень значительна. При этом гармоничность по времени ζ и r , верна, ведь r меняется слабо и линейные приближения всех уравнений движений разумны.

Качественный вид траектории уже понятен: движение с периодическим изменением радиуса, в среднем изменение угла φ происходит со скоростью $\langle \zeta \rangle$.

Количество радиальных колебаний за один оборот:

$$N = \frac{\xi}{\langle \zeta \rangle} = 6.83.$$

Стоит отметить, что при численном решении дифференциальных уравнений движения получается, что на самом деле $N = 7$ и траектория является замкнутой с хорошей точностью, приближение даёт близкий ответ, что подтверждает разумность сделанных приближений. Нарисуем полученную нами траекторию:

$$\begin{cases} r = r_0 - A + A \cos(\xi t), \\ \varphi = \langle \zeta \rangle t + \frac{\zeta_0 - \langle \zeta \rangle}{\xi} \sin(\xi t). \end{cases}$$

Она расположена между окружностями с радиусами $r_0 = 15.0$ см и $r_0 - 2A = 13.7$ см (они изображены на рисунке ниже пунктиром) и за один оборот по траектории происходит почти 7 радиальных колебаний:

Ответ:

