

A1^{0.10}

Найдите максимально возможное время движения $t_{\max}$. Далее будем рассматривать только движение при временах, не превосходящих $t_{\max}$.

Максимальное время будет соответствовать достижению скорости света, то есть:

$$c = t_{\max}(d)a(d) = t_{\max}(d)\frac{a_0}{1 + 2a_0d/c^2},$$

откуда для заданного наблюдателя

$$t_{\max} = \frac{c}{a_0} \left(1 + \frac{2a_0d}{c^2} \right).$$

Поскольку $d \geq 0$, для всех частиц модель будет применима при $t > t_{\max}$ с

Ответ:

$$t_{\max}(d) = \frac{c}{a_0}$$

A2^{0.50}

Покажите, что если для двух наблюдателей в начальный момент $d_1 < d_2$, то при $t < t_{\max}$ для их координат по прежнему будет выполняться $x_1(t) < x_2(t)$.

Координаты наблюдателей зависят от времени следующим образом:

$$x_1(t) = d_1 + \frac{a_0 t^2 / 2}{1 + 2a_0 d_1 / c^2}, \quad x_2 = d_2 + \frac{a_0 t^2 / 2}{1 + 2a_0 d_2 / c^2}.$$

Ускорение второго наблюдателя больше, поэтому он постепенно догоняет первого, и расстояние между наблюдателями монотонно убывает. Их разность координат равна

$$\Delta x(t) = x_2(t) - x_1(t) = (d_2 - d_1) \left(1 - \frac{a_0^2 t^2 / c^2}{\left(1 + \frac{2a_0 d_1}{c^2} \right) \left(1 + \frac{2a_0 d_2}{c^2} \right)} \right).$$

Первый наблюдатель достигнет скорости света быстрее, поэтому максимальное время движения $t_{\max} = c/a(d_1)$. Тогда нам нужно проверить, что значение $\Delta x(t_{\max}) > 0$:

$$\Delta x(t_{\max}) = (d_2 - d_1) \left(1 - \frac{1 + 2a_0 d_1 / c^2}{1 + 2a_0 d_2 / c^2} \right) = \frac{2a_0(d_2 - d_1)^2}{c^2 + 2a_0 d_2} > 0$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что достаточно было проверить, что $\Delta x(t) > 0$ при $t_{\max} = c/a_0$ из предыдущего пункта. Это можно сделать аналогично, или определить время t_1 , при котором первый наблюдатель догонит второго,

$$t_1 = \frac{c}{a_0} \sqrt{1 + \frac{2a_0 d_1}{c^2}} \sqrt{1 + \frac{2a_0 d_2}{c^2}} > \frac{c}{a_0}.$$

A3^{1.00}

Пусть наблюдатель 1 в момент времени t_1 испускает световой сигнал, а наблюдатель 2 получает его в момент времени t_2 . Ускорения наблюдателей a_1 и a_2 , начальные координаты d_1 и d_2 соответственно. Покажите, что между этими временами выполняется соотношение

$$\left(t_1 - \frac{c}{a_1} \right)^2 = \varepsilon \left(t_2 - \frac{c}{a_2} \right)^2,$$

если $d_2 > d_1$, и соотношение

$$\left(t_1 + \frac{c}{a_1} \right)^2 = \varepsilon \left(t_2 + \frac{c}{a_2} \right)^2,$$

если $d_2 < d_1$. Выразите постоянную ε через a_1 и a_2 .

Рассмотрим сначала случай, когда $d_2 > d_1$. До достижения второго наблюдателя свет пройдёт расстояние

$$x_2(t_2) - x_1(t_1) = d_2 - d_1 + \frac{a_2 t_2^2}{2} - \frac{a_1 t_1^2}{2} = c(t_2 - t_1), \quad (1)$$

откуда:

$$\left(\frac{a_2 t_2^2}{2} - ct_2 \right) - \left(\frac{a_1 t_1^2}{2} - ct_1 \right) = d_1 - d_2.$$

Выделим в левой части полные квадраты по t_1 и t_2 , получим

$$\left(t_2 - \frac{c}{a_2} \right)^2 \frac{a_2}{2} - \left(t_1 - \frac{c}{a_1} \right)^2 \frac{a_1}{2} - \frac{c^2}{2} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) = d_1 - d_2$$

Подставляя d_1 и d_2 , выраженные через a_1 , a_2 , c , получаем, что слагаемое с $d_1 - d_2$ сокращается и остаются только полные квадраты:

$$\left(t_1 - \frac{c}{a_1}\right)^2 = \left(t_2 - \frac{c}{a_2}\right)^2 \frac{a_2}{a_1},$$

откуда находим искомый параметр:

$$\varepsilon = \frac{a_2}{a_1}.$$

Случай, когда $d_2 < d_1$ отличается от $d_2 > d_1$ только направлением распространения светового сигнала, то есть в выражении (1) нужно заменить c на $-c$.

Ответ:

$$\varepsilon = \frac{a_2}{a_1}$$

A4^{1.30}

Для того, чтобы измерить расстояние до другого наблюдателя, наблюдатель 1 (с начальным значением координаты d_1) испускает в момент времени t_A луч, который достигает наблюдателя 2 (с начальной координатой $d_2 > d_1$) в некоторый момент времени t_C , отражается и возвращается к первому наблюдателю в момент времени t_B (по часам лабораторной СО). Тогда наблюдатель 1 считает, что расстояние до наблюдателя 2 равно $D_{rad} = c(t_B - t_A)/2$. Выразите это расстояние через d_1 , d_2 , a_0 , c и покажите, что оно не зависит от t_A .

Используя первое соотношение из предыдущего пункта, запишем связь между временами t_A и t_C :

$$\left(t_A - \frac{c}{a_1}\right) = \left(t_C - \frac{c}{a_2}\right) \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}.$$

Аналогично из второго соотношения предыдущего пункта следует связь времен t_C и t_B . При этом важно понимать, что посылает сигнал наблюдатель с ускорением a_2 , а принимает наблюдатель с ускорением a_1 , поэтому a_1 и a_2 нужно поменять местами, в том числе и в коэффициенте ε :

$$\left(t_C + \frac{c}{a_2}\right) = \left(t_B + \frac{c}{a_1}\right) \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}.$$

Знаки плюс в обоих выражениях берутся, поскольку с увеличением времени испускания сигнала время его приема также должно возрастать. Выражая t_C из первой формулы и подставляя во вторую, получим

$$t_B = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \left(t_C + \frac{c}{a_2}\right) - \frac{c}{a_1} = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \left[\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \left(t_A - \frac{c}{a_1}\right) + 2\frac{c}{a_2} \right] - \frac{c}{a_1}.$$

Таким образом, найдем время от испускания сигнала до приема

$$t_B - t_A = \frac{2c}{\sqrt{a_1 a_2}} - \frac{2c}{a_2}.$$

Это время действительно не зависит от времени испускания сигнала t_A , поэтому измеренное расстояние D_{rad} также не зависит от t_A . Окончательно получаем подставляя выражения для $a_{1,2}$ через $d_{1,2}$

Ответ:

$$D_{rad} = \frac{c^2}{a_0} \left(\sqrt{1 + \frac{2a_0 d_1}{c^2}} \sqrt{1 + \frac{2a_0 d_2}{c^2}} - 1 - \frac{2a_0 d_1}{c^2} \right)$$

A5^{0.30}

Пусть $d_1 = d$, а $d_2 = d_1 + \Delta d$, где $\Delta d \ll d$ – положительное расстояние между наблюдателями. Выразите D_{rad} в первом порядке малости по Δd через d , a_0 , c и Δd .

При $d_1 = d_2$ расстояние $D_{rad} = 0$, поэтому в первом порядке

$$D_{rad} = \frac{\partial D_{rad}}{\partial d_2} \Delta d,$$

причем в выражение для производной нужно подставить $d_1 = d_2 = d$. Дифференцируя, получим

Ответ:

$$D_{rad} = \Delta d$$

Отметим, что это выражение не зависит ни от ускорений, ни от времени, несмотря на то, что физически наблюдатели сближаются.

B1^{0.20} Пусть наблюдатель движется относительно инерциальной системы отсчета со скоростью v . При этом в момент времени $t = 0, x = 0$. Выразите x, t через τ .

В сопутствующей СО перемещение наблюдателя $x' = 0$. Тогда из преобразований Лоренца следует:

$$x = \gamma(x' + v\tau) = \frac{v\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \gamma\left(\tau + \frac{x'v}{c}\right) = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ответ:

$$x(\tau) = \frac{v\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

B2^{0.70} Пусть некоторое событие произошло в точке с временем и координатой (t, x) . Определите для него значения собственного времени τ_1, τ_2 . Для простоты можете провести вычисления только для случая, когда событие произошло справа от наблюдателя.

Световой сигнал пройдёт от наблюдателя до события расстояние

$$x - x(\tau_1) = c(t - t(\tau_1)),$$

а от события до наблюдателя – расстояние

$$x - x(\tau_2) = c(t(\tau_2) - t).$$

Подставив выражения для $x(\tau)$ и $t(\tau)$ из предыдущего пункта, получим:

Ответ:

$$\tau_1 = \frac{(ct - x)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c - v}, \quad \tau_2 = \frac{(ct + x)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c + v}$$

B3^{0.40} Покажите, что определенные таким образом время и координата (T, X) совпадают с временем и координатой в инерциальной СО, движущейся со скоростью v относительно исходной СО.

Используя определения из условия, получим

$$X = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2}c = \frac{(ct + x)(c - v) - (ct - x)(c + v)}{2c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$T = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = \frac{(ct - x)(c + v) + (ct + x)(c - v)}{2c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

То есть $X = \gamma(x - vt), T = \gamma(t - xv/c^2)$, что соответствует координате и времени в СО, движущейся со скоростью v относительно исходной СО.

Ответ:

$$X = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad T = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

C1^{0.80} Покажите, что при подходящем выборе начальных условий для такого наблюдателя зависимость координаты и времени от собственного времени имеет вид

$$x = A \operatorname{ch} \alpha \tau, \quad t = B \operatorname{sh} \alpha \tau.$$

Определите значения постоянных A, B, α . Выразите ответ через g, c .

В каждый момент времени мы можем переходить в сопутствующую СО, в которой тело будет покоиться в момент перехода, но иметь ускорение g . Тогда за время $d\tau$ после перехода в сопутствующую СО (по её часам) наблюдатель приобретёт скорость

$$dv' = g d\tau = c d\theta,$$

откуда скорость наблюдателя в ЛСО в момент времени τ (по часам наблюдателя) равна

$$v(\tau) = c \operatorname{th} \theta(\tau) = c \operatorname{th} \frac{g\tau}{c}.$$

Перемещение наблюдателя относительно ЛСО за время dt (по часам ЛСО) равно

$$dx = c \operatorname{th} \left(\frac{g\tau}{c} \right) dt$$

Преобразование Лоренца для времени можно записать так:

$$d\tau = \operatorname{ch} \frac{g\tau}{c} \cdot \left(dt - \operatorname{th} \left(\frac{g\tau}{c} \right) \frac{dx}{c} \right) = \operatorname{ch} \frac{g\tau}{c} \cdot \left(1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{g\tau}{c} \right) \right) dt = \frac{dt}{\operatorname{ch} \frac{g\tau}{c}},$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{c}{g} \cdot \operatorname{sh} \frac{g\tau}{c}, \quad x = c \int_0^\tau \operatorname{th} \frac{g\tau}{c} \cdot \operatorname{ch} \frac{g\tau}{c} d\tau = \frac{c^2}{g} \cdot \operatorname{ch} \frac{g\tau}{c}.$$

Откуда:

Ответ:

$$A = \frac{c^2}{g}, \quad B = \frac{c}{g}, \quad \alpha = \frac{g}{c}$$

C2 ^{1.50}

Пусть в момент времени t в точке с координатой x произошло некоторое событие.

Эти координаты (t, x) можно выразить через X и T (определенные для наблюдателя из **C1** способом, описанным во введении к части **B**) следующим образом:

$$x = Af(X) \operatorname{ch} \alpha T, \quad t = Bf(X) \operatorname{sh} \alpha T,$$

где A, B, α – постоянные, определённые в предыдущем пункте, а $f(X)$ – некоторая функция координаты X . Таким образом, пару чисел можно рассматривать как координаты события в неинерциальной системе отсчета. Однако оказывается, что изменяя значения T, X можно получить не все координаты (t, x) . Это связано с тем, что сигнал от некоторых событий никогда не достигает наблюдателя.

Выразите функцию $f(X)$ через g и c . Для простоты можете ограничиться случаем, когда событие произошло справа от наблюдателя. Если событие находится слева от наблюдателя, вид зависимости (t, x) от (T, X) такой же. Изобразите в координатах (x, t) область пространства-времени, которая покрывается координатами (X, T) , когда они меняются от $-\infty$ до $+\infty$.

Для путей светового сигнала можем записать выражения аналогичные пункту B2:

$$\begin{cases} x - x(\tau_1) = c(t - t(\tau_1)) \\ x - x(\tau_2) = c(t(\tau_2) - t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x(\tau_1) + x(\tau_2) - ct(\tau_1) + ct(\tau_2)) \\ t = \frac{1}{2}\left(t(\tau_1) + t(\tau_2) - \frac{x(\tau_1)}{c} + \frac{x(\tau_2)}{c}\right) \end{cases}$$

Тогда подставляя выражения для $x(\tau_{1,2})$ и $t(\tau_{1,2})$ из предыдущего пункта, получим:

$$x = \frac{c^2}{2g} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{g\tau_1}{c} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{g\tau_2}{c} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{g\tau_1}{c} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{g\tau_2}{c} \right) \right] = \frac{c^2}{2g} \left[\exp \left(\frac{-g\tau_1}{c} \right) + \exp \left(\frac{g\tau_2}{c} \right) \right]$$

$$t = \frac{c}{2g} \left[-\operatorname{ch} \left(\frac{g\tau_1}{c} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{g\tau_2}{c} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{g\tau_1}{c} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{g\tau_2}{c} \right) \right] = \frac{c}{2g} \left[-\exp \left(\frac{-g\tau_1}{c} \right) + \exp \left(\frac{g\tau_2}{c} \right) \right]$$

Выразим $\tau_{1,2}$ через T и X :

$$\begin{cases} T = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \\ X = c \cdot \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau_1 = T - \frac{X}{c} \\ \tau_2 = T + \frac{X}{c} \end{cases}$$

Подставив в выражения для x и t , получим:

$$x = \frac{c^2}{g} \cdot \exp \left(\frac{Xg}{c^2} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{gT}{c} \right)$$

$$t = \frac{c}{g} \cdot \exp \left(\frac{Xg}{c^2} \right) \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{gT}{c} \right)$$

При фиксированном значении X эти уравнения параметрически задают гиперболы с общими асимптотами

$$x^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{g^2} \exp \left(\frac{2gX}{c^2} \right),$$

причем уравнения описывают только правую ветвь гиперболы с $x > 0$. В пределе $X \rightarrow -\infty$ эта гипербола перейдет в пару лучей $x = \pm ct$ при $x > 0$. Таким образом, координаты покрывают четверть пространства-времени, ограниченного неравенством

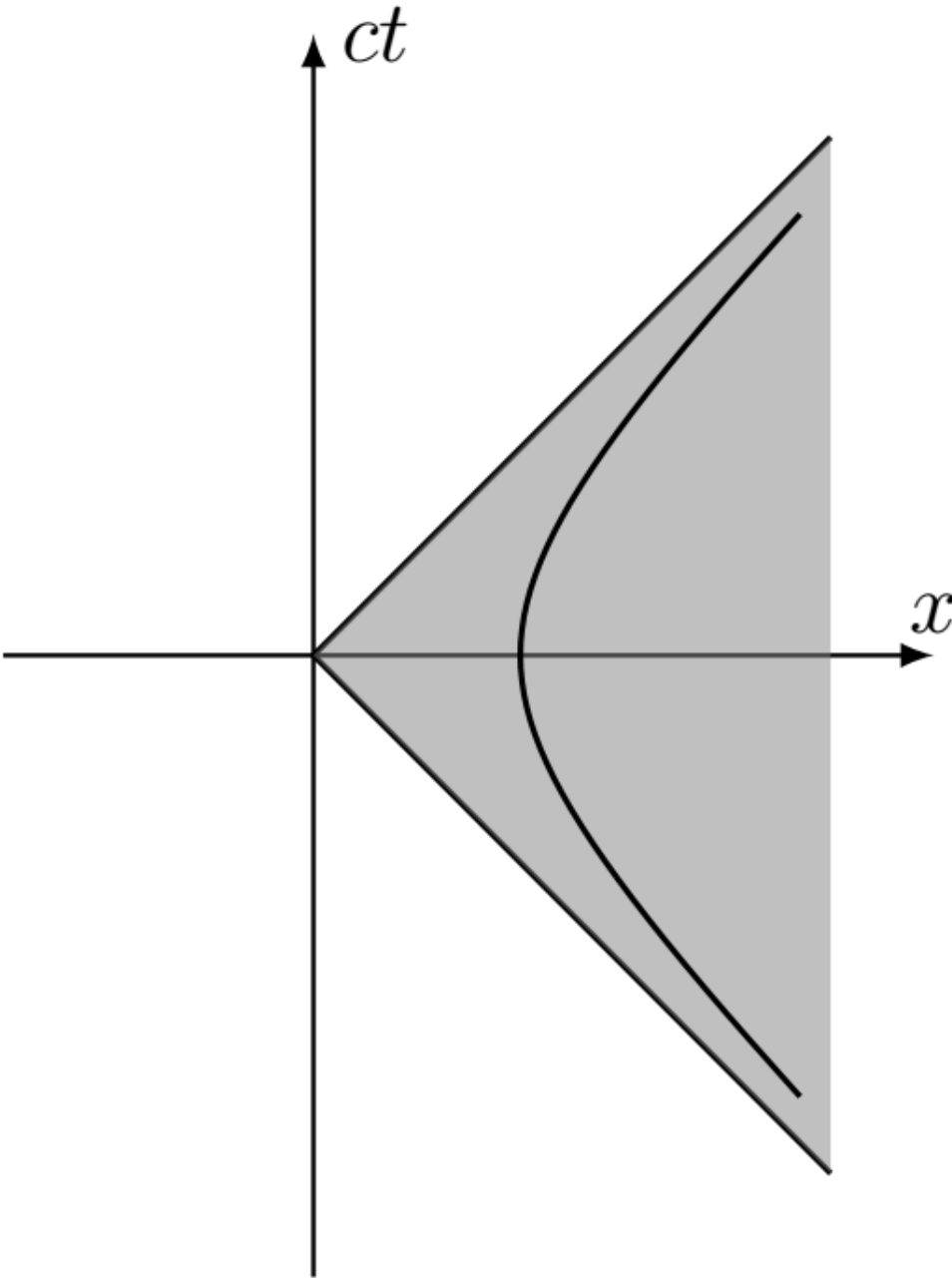
$$x \geq c|t|.$$

Физически такое ограничение связано с тем, что сигналы от части областей пространства-времени никогда не достигают наблюдателя, поскольку его скорость становится бесконечно близкой к скорости света. До других областей пространства-времени сигналы от наблюдателя не могут дойти, поскольку при $t \rightarrow -\infty$ он находится бесконечно далеко и приближается со скоростью очень близкой к скорости света. Пересечение этих двух областей и задает часть пространства, покрываемую координатами.

Ответ:

$$f(X) = \exp\left(\frac{Xg}{c^2}\right)$$

Ответ:



СЗ 0.50

Напомним, что интервалом между двумя бесконечно близкими событиями называется величина, квадрат которой равен $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$.

Покажите, что интервал между двумя близкими событиями можно записать в виде

$$ds^2 = F(X, T)(c^2 dT^2 - dX^2).$$

Найдите функцию $F(X, T)$. В ответ могут входить g, c .

Запишем выражение для дифференциала интервала

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2,$$

подставим в него выражения для дифференциалов координаты и времени

$$\begin{aligned} dx &= \frac{c^2}{g} \cdot \exp\left(\frac{Xg}{c^2}\right) \cdot \left(\operatorname{sh}\left(\frac{gT}{c}\right) \frac{gdT}{c} + \operatorname{ch}\left(\frac{gT}{c}\right) \frac{gdX}{c^2} \right), \\ dt &= \frac{c}{g} \cdot \exp\left(\frac{Xg}{c^2}\right) \cdot \left(\operatorname{ch}\left(\frac{gT}{c}\right) \frac{gdT}{c} + \operatorname{sh}\left(\frac{gT}{c}\right) \frac{gdX}{c^2} \right), \end{aligned}$$

тогда:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \exp\left(\frac{2gX}{c^2}\right) \cdot \left[\operatorname{sh}^2\left(\frac{gT}{c}\right) dX^2 + \operatorname{ch}^2\left(\frac{gT}{c}\right) dT^2 c^2 + 2 \operatorname{sh}\left(\frac{gT}{c}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{gT}{c}\right) dX dT c - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{ch}^2\left(\frac{gT}{c}\right) dX^2 - \operatorname{sh}^2\left(\frac{gT}{c}\right) dT^2 c^2 - 2 \operatorname{sh}\left(\frac{gT}{c}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{gT}{c}\right) dX dT c \right] = \\ &= \exp\left(\frac{2gX}{c^2}\right) \cdot (dT^2 c^2 - dX^2). \end{aligned}$$

Откуда:

Ответ:

$$F(X, T) = \exp\left(\frac{2gX}{c^2}\right)$$

C4^{0.70}

В построенной таким образом системе координат естественно считать неподвижными тела, для которых $X = \text{const}$. Покажите, что такие тела движутся с постоянным ускорением в сопутствующей СО, выразите это ускорение $a(X)$ через X, g, c . Таким образом, можно считать, что система отсчета образована наблюдателями, которые движутся по законам, определяемым условием $X = \text{const}$.

При фиксированном X зависимость координаты от параметра T имеет вид

$$x = \frac{c^2}{g} \exp\left(\frac{gX}{c^2}\right) \operatorname{ch} \frac{gT}{c}, \quad t = \frac{c}{g} \exp\left(\frac{gX}{c^2}\right) \operatorname{sh} \frac{gT}{c}.$$

Для такой частицы интервал имеет вид (с учетом $dX = 0$)

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dT^2 \exp\left(\frac{2gX}{c^2}\right),$$

где τ – собственное время частицы. Таким образом, параметр T выражается через собственное время как

$$T = \tau \exp\left(-\frac{gX}{c^2}\right),$$

а значит зависимость координаты и времени от собственного времени имеет вид

$$x = \frac{c^2}{a} \operatorname{ch} \frac{a\tau}{c}, \quad t = \frac{c}{a} \operatorname{sh} \frac{a\tau}{c},$$

где

$$a(X) = g \exp\left(-\frac{gX}{c^2}\right).$$

Эти уравнения совпадают с полученными в части С1 уравнениями для равноускоренного движения с ускорением a . Отметим, что уравнения представляют собой параметрическое задание траектории частицы в пространстве-времени, причем в роли параметра выступает T . Если подставить вместо T любую функцию некоторого параметра ξ , монотонно пробегающую все значения от $-\infty$ до ∞ , то получим ту же траекторию. В частности можно заметить, что если подставить вместо T величину τ , найденную выше, то уравнения формально перейдут в уравнения равноускоренного движения, а значит рассматриваемое движение – равноускоренное.

Ответ:

$$a(X) = g \exp\left(-\frac{gX}{c^2}\right)$$

C5^{0.70}

Пусть наблюдатель с координатой X_0 в момент T_0 испускает световой луч в положительном направлении оси x . Как для этого луча будет зависеть X от T в последующие моменты?

При распространении светового луча интервал между событиями равен нулю. Запишем это равенство в новых координатах

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = F(X, T) (c^2 dT^2 - dX^2) = 0.$$

Отсюда получим, что в новых координатах также выполняется соотношение $dX = \pm c dT$, поэтому координатная скорость для света (то есть производная X по T также равна c). С учетом направления распространения, получим уравнение светового луча в виде

$$X(T) = X_0 + c(T - T_0).$$

То же уравнение можно получить прямым преобразованием уравнения светового луча в новые координаты.

Ответ:

$$X(T) = X_0 + c(T - T_0)$$

C6^{1.30}

Пусть наблюдатель с координатой X_1 в момент T_1 испускает свет с длиной волны λ_1 (в сопутствующей СО наблюдателя). Определите длину волны λ_2 , которую измерит наблюдатель с координатой X_2 в своей сопутствующей СО. Считайте, что для наблюдателей $X_1, X_2 = \text{const}$.

Если источник, движущийся со скоростью β излучает свет с длиной волны λ_1 , то за счет эффекта Доплера в лабораторной СО его длина волны будет равна

$$\lambda_0 = \lambda_1 \sqrt{\frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1}},$$

где $\beta = v/c$. У источника 1 в момент времени T_1 гамма-фактор равен

$$\gamma_1 = \text{ch} \frac{gT}{c},$$

поэтому безразмерная скорость

$$\beta_1 = \frac{v_1}{c} = \text{th} \frac{gT_1}{c},$$

а коэффициент в эффекте Доплера

$$\sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+\beta_2}} = e^{-gT_1/c}.$$

Второй наблюдатель получит длину волны

$$\lambda_2 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta_2}{1-\beta_2}},$$

где коэффициент можно выразить через время аналогичным образом как $\exp(gT_2/c^2)$.

Для второго наблюдателя

$$T_2 = T_1 + (X_2 - X_1)/c,$$

поэтому

$$\lambda_2 = \lambda_1 e^{g(T_2-T_1)/c} = \lambda_1 e^{g(X_2-X_1)/c^2}.$$

Ответ:

$$\lambda_2 = \lambda_1 e^{g(T_2-T_1)/c} = \lambda_1 e^{g(X_2-X_1)/c^2}$$