

A1 0.20 Чему равно $\langle \Theta \rangle$ в кристаллической фазе?

В силу несжимаемости жидкости ее объем жидкости не, поэтому $\langle \Theta \rangle = 0$

Ответ:

$$\langle \Theta \rangle = 0$$

A2 0.20 Опишите симметрии системы, то есть преобразования, которые не изменяют вид зависимость энергии Π системы от $\Theta(X, Y)$.

Ответ: Вся система симметрична относительно любых T и R так как в ней нет выделенных направлений или выделенных сдвигов.

A3 0.20 Опишите симметрии равновесного состояния жидкой фазы, то есть преобразования, которые не изменяют состояние системы: $\Theta(X', Y') = \Theta(X, Y)$.

Ответ: Основное состояние жидкой фазы симметрично относительно любых T и R .

A4 0.40 Опишите симметрии равновесных состояний кристаллической фазы.

Ответ: Основное состояния кристаллической фазы симметрично относительно трансляций T вдоль кристаллических направлений гексагональной решетки и вращений R на $\pi/3$ вокруг точек гексагональной решетки.

A5 0.60 Запишите Π_g через ρ, g и $\langle \Theta^2 \rangle$.

Ответ:

$$\Pi_g = \frac{1}{2} \rho g \langle \Theta^2 \rangle$$

A6 0.20 Запишите Π_σ через σ и усреднение, содержащие $(\nabla_0 \Theta)^2$, где $\nabla_0 = (\partial_X, \partial_Y)$ это двумерный вектор набла.

$$\nabla_0 \Theta = \begin{pmatrix} \partial_X \Theta \\ \partial_Y \Theta \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\Pi_\sigma = \sigma \left\langle \sqrt{1 + (\nabla_0 \Theta)^2} \right\rangle$$

A7 0.60 Запишите Π_B через $\vec{B}(X, Y, Z)$, $\vec{B}_0$, μ , μ_0 и Θ . Запись может содержать усреднение от интеграла вдоль оси Z .

Считайте, что слой жидкости является бесконечно глубоким.

Ответ:

$$\Pi_B = -\frac{\mu - 1}{2\mu\mu_0} \left\langle \int_{-\infty}^{\Theta} \vec{B} \cdot \vec{B}_0 dZ \right\rangle$$

А8 ^{0.60} Запишите выражение для безразмерной энергии U единицы безразмерной площади системы. В ответ могут входить ζ , μ , μ_0 , $\sqrt{\sigma\rho g}$, $\vec{B}(x,y,z)$, $\vec{B}_0$, безразмерная $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ и интегрирование по безразмерному z .

Ответ:

$$U = \frac{1}{2} \langle \zeta^2 \rangle + \left\langle \sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2} \right\rangle - \frac{\mu - 1}{2\mu_0\mu\sqrt{\sigma\rho g}} \left\langle \int_{-\infty}^{\zeta} \vec{B} \cdot \vec{B}_0 dz \right\rangle$$

В1 ^{0.30} Чему равен скачок ΔH напряженность магнитного поля на поверхности парамагнетика в случае плоской поверхности? Знак выбран следующим образом: $\Delta H = H_{0\uparrow}(z = 0) - H_{0\downarrow}(z = 0)$. Ответ выразите через B_0 , μ и μ_0 .

Индуктивность магнитного поля перпендикулярна поверхности парамагнетика, поэтому её величина одинакова во всём пространстве.

$$H_0(+0) = \frac{B_0}{\mu_0}, \quad H_0(-0) = \frac{B_0}{\mu\mu_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta H = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\mu - 1}{\mu}$$

Ответ:

$$\Delta H = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\mu - 1}{\mu}$$

В2 ^{0.30} Запишите уравнение $\operatorname{div} \vec{b} = 0$ в вакууме и внутри вещества через частные производные второго порядка $\partial_{x,y,z}^2 \phi_{\uparrow,\downarrow}$.

$\vec{b} = \mu\mu_0\vec{h}$. Если мы берем дивергенцию от правой части в области, которая не включает границу, то $\operatorname{div} \vec{b} = \mu\mu_0 \operatorname{div} \nabla \phi = \mu\mu_0 \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) \phi = \mu\mu_0 \Delta \phi = 0$. Получаем уравнение Пуассона в обеих областях.

Ответ:

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) \phi_{\uparrow,\downarrow} = 0$$

В3 ^{0.30} Запишите приближенное уравнение, соответствующие граничному условию для поля $\vec{B}$. В ответ могут входить **только** компоненты полей $\vec{b}_{\uparrow,\downarrow}$.

Нормаль к поверхности $\vec{n}$ имеет координаты $(-\partial_x \zeta, -\partial_y \zeta, 1)$. Поэтому граничное условие $\vec{B}_{\uparrow} \cdot \vec{n} = \vec{B}_{\downarrow} \cdot \vec{n}$ сводится к $b_{z\uparrow} = b_{z\downarrow}$.

Ответ:

$$b_{z\uparrow} = b_{z\downarrow}$$

В4 ^{0.60} Запишите приближенные уравнения, соответствующие граничному условию для поля $\vec{H}$. В ответ могут входить компоненты поля $\vec{h}_{\uparrow,\downarrow}$, ΔH и $\partial_{x,y} \zeta$.

В силу малости возмущений $|\vec{h}| \ll \Delta H$.

Нормаль к поверхности $\vec{n}$ имеет координаты $(-\partial_x \zeta, -\partial_y \zeta, 1)$. Поэтому граничное условие $\vec{H}_{\uparrow} \times \vec{n} = \vec{H}_{\downarrow} \times \vec{n}$ сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} h_{x\uparrow} + H_{0\uparrow} \partial_x \zeta = h_{x\downarrow} + H_{0\downarrow} \partial_x \zeta \\ h_{y\uparrow} + H_{0\uparrow} \partial_y \zeta = h_{y\downarrow} + H_{0\downarrow} \partial_y \zeta \end{cases}.$$

Ответ:

$$\begin{cases} h_{x\uparrow} + \Delta H \partial_x \zeta = h_{x,\downarrow} \\ h_{y\uparrow} + \Delta H \partial_y \zeta = h_{y,\downarrow} \end{cases}$$

B5 ^{0.70} С помощью пункта **B2** получите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции $u_{i\uparrow,\downarrow}$. Найдите вид решений (т.е. в ответ могут входить неизвестные константы) $u_{i\uparrow,\downarrow}(z)$ в вакууме и в парамагнетике. Постройте качественный график $u_{i\uparrow}$ и $u_{i\downarrow}$ от z . Напомним, что $\phi(x, y, z)$ создает **малые** возмущения магнитного поля **во всем** пространстве, в т.ч. при $z = \pm\infty$.

Функциональный вид $u_i(z)$ следует из уравнения Пуассона для ϕ . $\Delta(u_i(z) \cos(k_{ix}x + k_{iy}y)) = (\partial_z^2 - k_i^2)u_i(z) \cos(k_{ix}x + k_{iy}y)$, то есть $u_{i\uparrow}(z) = u_{i\uparrow}e^{-kz}$ и $u_{i\downarrow}(z) = u_{i\downarrow}e^{kz}$ (в каждом случае остаётся только одна экспонента из условия малости возмущения при удалении на бесконечность).

Ответ:

$$u_{i\uparrow}(z) = u_{i\uparrow}e^{-kz}, \quad u_{i\downarrow}(z) = u_{i\downarrow}e^{kz}$$

B6 ^{0.80} Найдите значения констант из предыдущего пункта и запишите $\phi_{\uparrow,\downarrow}(\vec{r}, z)$ в вакууме и в парамагнетике. В ответ могут входить ΔH , μ , k_i и $a_i \cos \vec{k}_i \vec{r}$.

Учтите, что $k_i \cdot \zeta(x, y) \ll 1$.

Запишем граничные условия из \textbf{B3}:

$$\begin{aligned} b_{z\uparrow}(\zeta) &= \mu_0 \partial_z \phi_{\uparrow} = -\mu_0 \sum u_{i\uparrow} k_i e^{-k_i \zeta} \cos(k_{ix}x + k_{iy}y) \\ b_{z\downarrow}(\zeta) &= \mu \mu_0 \partial_z \phi_{\downarrow} = \mu \mu_0 \sum u_{i\downarrow} k_i e^{k_i \zeta} \cos(k_{ix}x + k_{iy}y) \end{aligned}$$

В ведущем приближении экспоненты $e^{\pm k\zeta} \simeq 1$ и тогда

$$-u_{i\uparrow} = \mu u_{i\downarrow}.$$

Граничные условия из \textbf{B4} выглядят абсолютно одинаково:

$$\begin{aligned} \sum u_{i\uparrow} k_{ix} e^{-k\zeta} \sin(k_{ix}x + k_{iy}y) + \Delta H \sum a_i k_{ix} \sin(k_{ix}x + k_{iy}y) &= \\ = \sum u_{i\downarrow} k_{ix} e^{k\zeta} \sin(k_{ix}x + k_{iy}y). \end{aligned}$$

Снова в ведущем приближение $e^{\pm k\zeta} \simeq 1$ и

$$u_{i\uparrow} + \Delta H a_i = u_{i\downarrow}.$$

Решим систему уравнений для $u_{i\uparrow}$ и $u_{i\downarrow}$ и получим

$$u_{i\uparrow} = -a_i \frac{\mu \Delta H}{\mu + 1}, \quad u_{i\downarrow} = a_i \frac{\Delta H}{\mu + 1}.$$

Ответ:

$$\phi_{\uparrow} = -\sum \frac{\mu \Delta H}{\mu + 1} a_i e^{-k_i z} \cos(k_{ix}x + k_{iy}y), \quad \phi_{\downarrow} = \sum \frac{\Delta H}{\mu + 1} a_i e^{k_i z} \cos(k_{ix}x + k_{iy}y)$$

B7 ^{0.80} Выразите добавку к энергии магнитного поля ΔU_B через усредненный интеграл содержащий $\vec{b}$.

Запишем разность энергий:

$$\Delta U_B = -\frac{\mu - 1}{2\mu\mu_0\sqrt{\sigma\rho g}} \left(\left\langle \int_{-\infty}^{\zeta} b_z B_0 dz \right\rangle + \left\langle \int_{-\infty}^{\zeta} B_0^2 dz \right\rangle - \left\langle \int_{-\infty}^0 B_0^2 dz \right\rangle \right).$$

$$\Delta U_B = -\frac{\mu - 1}{2\mu\mu_0\sqrt{\sigma\rho g}} \left(\left\langle \int_{-\infty}^{\zeta} b_z B_0 dz \right\rangle + \left\langle \int_0^{\zeta} B_0^2 dz \right\rangle \right)$$

$$\Delta U_B = -\frac{\mu - 1}{2\mu\mu_0\sqrt{\sigma\rho g}} \left(\left\langle \int_{-\infty}^{\zeta} b_z B_0 dz \right\rangle + \langle \zeta \rangle B_0^2 \right)$$

С учётом $\langle \zeta \rangle = 0$ получаем итоговый ответ.

Ответ:

$$\Delta U_B = -\frac{\mu - 1}{2\mu\mu_0\sqrt{\sigma\rho g}} \left\langle \int_{-\infty}^{\zeta} b_z B_0 dz \right\rangle$$

B8 1.20 Найдите добавку к энергии магнитного поля ΔU_B , приходящейся на единицу площади. Ответ выразите через μ , μ_0 , B_0 , $\sqrt{\sigma\rho g}$, k , a и $\langle \zeta^2 \rangle$.

$$\begin{aligned} \Delta U_B &= -\frac{\mu - 1}{2\mu\mu_0\sqrt{\sigma\rho g}} \left\langle \int_{-\infty}^{\zeta} b_z B_0 dz \right\rangle = -\frac{(\mu - 1)B_0}{2\sqrt{\sigma\rho g}} \left\langle \int_{-\infty}^{\zeta} d\phi_{\downarrow} \right\rangle = -\frac{(\mu - 1)B_0}{2\sqrt{\sigma\rho g}} \langle \phi_{\downarrow}(\zeta) \rangle = \\ &= -\frac{(\mu - 1)^2 B_0^2}{2\sqrt{\sigma\rho g}\mu(\mu + 1)\mu_0} \langle \zeta e^{k\zeta} \rangle \simeq -\frac{(\mu - 1)^2 B_0^2}{2\sqrt{\sigma\rho g}\mu(\mu + 1)\mu_0} k \langle \zeta^2 \rangle \end{aligned}$$

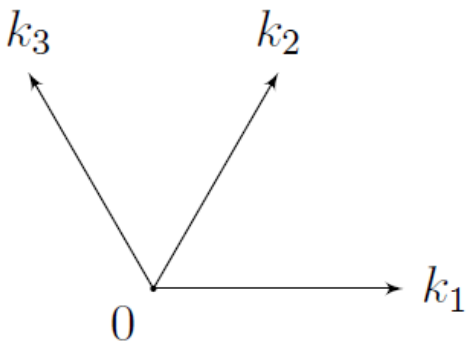
Ответ:

$$\Delta U_B = -\frac{(\mu - 1)^2 B_0^2}{2\sqrt{\sigma\rho g}\mu(\mu + 1)\mu_0} k \langle \zeta^2 \rangle$$

C1 0.30 Как связаны направления $\vec{k}_i$ друг с другом? Как связаны a_i друг с другом и с A ?

Ответ:

Концы векторов $\vec{k}_i$ лежат в вершинах шестиугольника. $a_i = A/3$ из симметрии состояния: при повороте на углы кратные $\pi/3$ моды переходят друг в друга.



C2 1.20 Найдите U как функцию A , k и параметров системы μ , μ_0 , $\sqrt{\sigma\rho g}$ и B_0 .

Рассмотрим ζ как сумму:

$$\zeta = \frac{A}{6} \left(e^{i\vec{k}_1\vec{r}} + e^{-i\vec{k}_1\vec{r}} + e^{i\vec{k}_2\vec{r}} + e^{-i\vec{k}_2\vec{r}} + e^{i\vec{k}_3\vec{r}} + e^{-i\vec{k}_3\vec{r}} \right),$$

тогда ζ^2 состоит из 36-ти слагаемых вида $e^{i(\pm\vec{k}_i \pm \vec{k}_j)\vec{r}}$. При усреднении по площади обнулятся все слагаемые, где $\pm\vec{k}_i \pm \vec{k}_j \neq 0$, а остальные шесть равны единице. Поэтому

$$\langle \zeta^2 \rangle = \frac{A^2}{6}.$$

Теперь $\nabla\zeta$:

$$\nabla\zeta = \frac{iA}{6} \left[\vec{k}_1 \left(e^{i\vec{k}_1\vec{r}} - e^{-i\vec{k}_1\vec{r}} \right) + \vec{k}_2 \left(e^{i\vec{k}_2\vec{r}} - e^{-i\vec{k}_2\vec{r}} \right) + \vec{k}_3 \left(e^{i\vec{k}_3\vec{r}} - e^{-i\vec{k}_3\vec{r}} \right) \right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\nabla\zeta)^2 &= -\frac{A^2 k^2}{36} \left[\left(e^{i\vec{k}_1\vec{r}} - e^{-i\vec{k}_1\vec{r}} \right)^2 + \left(e^{i\vec{k}_2\vec{r}} - e^{-i\vec{k}_2\vec{r}} \right)^2 + \left(e^{i\vec{k}_3\vec{r}} - e^{-i\vec{k}_3\vec{r}} \right)^2 \right] - \\ &\quad - \frac{A^2}{36} \left[\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 \left(e^{i\vec{k}_1\vec{r}} - e^{-i\vec{k}_1\vec{r}} \right) \left(e^{i\vec{k}_2\vec{r}} - e^{-i\vec{k}_2\vec{r}} \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что после усреднения по площади обнулятся все слагаемые со скалярными произведениями $\vec{k}_i \cdot \vec{k}_j, i \neq j$. Среди оставшихся будет шесть равных -1 , поэтому

$$\langle (\nabla \zeta)^2 \rangle = \frac{k^2 A^2}{6}.$$

Ответ:

$$U = 1 + \frac{A^2}{12} \left(1 + k^2 - \frac{(\mu - 1)^2 B_0^2}{\sqrt{\sigma \rho g} \mu (\mu + 1) \mu_0} k \right)$$

С3^{0.20} При каком B_c состояние $\zeta(x, y) = 0$ теряет устойчивость?

Обозначим

$$\frac{(\mu - 1)^2 B_0^2}{\sqrt{\sigma \rho g} \mu (\mu + 1) \mu_0} = 2k_0$$

. Среди всех k выберем такой, при котором выражение в скобках принимает минимальное значение:
 $k_{\min} = k_0$, при этом

$$U = 1 + \frac{a^2}{12} (1 - k_0^2),$$

то есть при $k_0 > 1$ наличие гексагональной решетки с $k = k_0$ начинает быть энергетически выгодным.

Ответ:

$$B_c = \sqrt{\frac{2\mu_0 \mu (\mu + 1) \sqrt{\sigma \rho g}}{(\mu - 1)^2}}$$

С4^{0.20} Гексагональная решетка с каким k_c возникает на поверхности жидкости при $B > B_c, B/B_c - 1 \ll 1$?

Ответ:

$$k_c = 1$$

С5^{0.10} Будет ли наблюдаться неустойчивость Розенцвейга в диамагнитной ($\mu < 1$) жидкости?

Ответ: Да, эффект не зависит от знака $\mu - 1$.