

A1 0.30

Пусть электрон начинает движение с нулевой начальной скоростью из точки C . Покажите, что в этом случае $x(t) = 0$.

В начальный момент электрон приобретает скорость по оси Oy , вдоль электрического поля. Это приводит к возникновению магнитной силы вдоль Oz и появлению компоненты скорости v_z . Связанная с v_z магнитная сила параллельна оси Oy . Таким образом, в процессе дальнейшего движения силы, действующие на электрон, лежат в плоскости Oyz , откуда следует $x(t) = 0$.

A2 0.50

Для описанного случая запишите второй закон Ньютона в проекции на оси y, z , из них получите выражения для $\ddot{y}, \ddot{z}$. В выражениях могут присутствовать $\dot{y}, \dot{z}, y, z, U, I$, а также геометрические характеристики системы.

В плоской конфигурации электрическое поле однородно и равно

$$E_y = \frac{\varphi_K - \varphi_A}{h} = -\frac{U}{h}.$$

Магнитное поле провода провода при движении электрона в плоскости Oyz параллельно Ox равно (например, из теоремы о циркуляции)

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(y + r_0)}.$$

С учётом отрицательности знака заряда электрона получаем уравнения движения:

$$\begin{cases} m\ddot{y} = -eE_y - e\dot{z}B_x \\ m\ddot{z} = e\dot{y}B_x \end{cases}$$

Подставляя выражения для полей, получаем ответ.

Ответ:

$$\begin{cases} \ddot{y} = \frac{eU}{mh} + \frac{\mu_0 e I}{2\pi m(y + r_0)} \dot{z} & (1) \\ \ddot{z} = -\frac{\mu_0 e I}{2\pi m(y + r_0)} \dot{y} & (2) \end{cases}$$

A3 1.00

Получите дифференциальное уравнение относительно y вида

$$\ddot{y} = \alpha - \beta \frac{\ln\left(1 + \frac{y}{r_0}\right)}{1 + \frac{y}{r_0}},$$

где α, β – константы. Найдите α, β . В ответе могут присутствовать все введённые ранее величины и константы.

Умножив второе уравнение на dt , приходим к соотношению

$$d\dot{z} = -\frac{\mu_0 e I}{2\pi m(y + r_0)} dy.$$

Интегрируем:

$$\dot{z} = -\frac{\mu_0 e I}{2\pi m} \int \frac{dy'}{y' + r_0} = -\frac{\mu_0 e I}{2\pi m} \ln\left(1 + \frac{y}{r_0}\right) + C.$$

С учётом начальных условий $\dot{z} = 0$ при $y = 0$, тогда $C = 0$, и

$$\dot{z} = -\frac{\mu_0 e I}{2\pi m} \ln\left(1 + \frac{y}{r_0}\right).$$

Постановка полученного выражения в (1) даёт

$$\ddot{y} = \frac{eU}{mh} - \frac{1}{r_0} \left(\frac{\mu_0 e I}{2\pi m}\right)^2 \frac{\ln\left(1 + \frac{y}{r_0}\right)}{1 + \frac{y}{r_0}}. \quad (3)$$

Отсюда получаем ответ.

Ответ:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{eU}{mh} \\ \beta &= \frac{1}{r_0} \left(\frac{\mu_0 e I}{2\pi m}\right)^2 \end{aligned}$$

A4 0.80

Найдите максимальное значение тока нагревателя $I_{\text{кр}}$, при котором рассматриваемый электрон достигает анода.

После домножения на $\dot{y}$ уравнение (3) преобразуется к виду

$$\frac{\dot{y}^2}{2} = \int \left(\frac{eU}{mh} - \frac{1}{r_0} \left(\frac{\mu_0 e I}{2\pi m} \right)^2 \frac{\ln \left(1 + \frac{y}{r_0} \right)}{1 + \frac{y}{r_0}} \right) dy.$$

Интеграл во втором слагаемом:

$$\int \frac{\ln \left(1 + \frac{y}{r_0} \right)}{1 + \frac{y}{r_0}} dy = r_0 \int \ln \left(1 + \frac{y}{r_0} \right) d \left(\ln \left(1 + \frac{y}{r_0} \right) \right) = \frac{r_0}{2} \ln^2 \left(1 + \frac{y}{r_0} \right) + C.$$

С учётом начальных условий $\dot{y} = 0$ при $y = 0$, тогда $C = 0$, и

$$\frac{\dot{y}^2}{2} = \frac{eUy}{mh} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 e I}{2\pi m} \right)^2 \ln^2 \left(1 + \frac{y}{r_0} \right).$$

Условие достижения электроном анода:

$$\begin{aligned} \dot{y}(h) &= 0, \\ 0 &= \frac{eU}{m} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 e I_{\text{кр}}}{2\pi m} \right)^2 \ln^2 \left(1 + \frac{h}{r_0} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем ответ для $I_{\text{кр}}$.

Ответ:

$$I_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{8Um}{e}} \frac{\pi}{\mu_0} \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{h}{r_0} \right)}$$

A5 1.20

Пусть электрон начинает движение с нулевой начальной скоростью из точки C в цилиндрической конфигурации лампы. Найдите в этом случае максимальное значение тока нагревателя $I_{\text{кр}}$, при котором электрон достигает анода.

Аналогично предыдущей ситуации показывается, что движение будет происходить в плоскости Oyz , если ввести оси также, как на рисунке для плоской конфигурации.

Метод 1

Будем рассматривать движение в координатах (r, z) , где r – расстояние от оси системы до точки. Рассчитаем электрическое поле, используя теорему Гаусса. В силу отсутствия объёмных зарядов

$$\begin{aligned} E_r \cdot r &= \text{const.} \quad \Rightarrow \quad E_r = \frac{A}{r}, \\ U &= - \int_{r_0}^{R_0} E_r dr = -A \ln \left(\frac{R_0}{r_0} \right), \\ E_r &= - \frac{U}{r \ln \left(\frac{R_0}{r_0} \right)}. \end{aligned}$$

Магнитное поле:

$$B_x = - \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Тогда уравнения движения выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{r} = - \frac{eU}{mr \ln \left(\frac{R_0}{r_0} \right)} + \frac{\mu_0 e I}{2\pi m(y + r_0)} \dot{z} \\ \ddot{z} = - \frac{\mu_0 e I}{2\pi m(y + r_0)} \dot{r} \end{cases}$$

Аналогичным образом после интегрирования второго уравнения, подстановки в первое и повторного интегрирования получаем уравнение на $I_{\text{кр}}$:

$$\frac{eU}{m} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 e I_{\text{кр}}}{2\pi m} \right)^2 \ln^2 \left(\frac{R_0}{r_0} \right).$$

Отсюда получаем ответ.

Ответ:

$$I_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{8Um}{e}} \frac{\pi}{\mu_0} \frac{1}{\ln\left(\frac{R_0}{r_0}\right)}$$

Метод 2

Рассмотрим уравнения движения из пункта А2, не подставляя конкретные значения E_y и B_x :

$$\begin{cases} \ddot{y} = -\frac{e}{m}(E_y(y) + \dot{z}B_x(y)) \\ \dot{z} = \frac{e}{m}\dot{y}B_x(y) \end{cases}.$$

С учётом начальных условий из второго уравнения получим:

$$\dot{z} = \frac{e}{m} \int_0^y B_x(\xi) d\xi.$$

Подставим в первое уравнение:

$$\ddot{y} = -\frac{e}{m} \left(E_y(y) + \frac{e}{m} B_x(y) \int_0^y B_x(\xi) d\xi \right).$$

Домножим на $\dot{y}$ и проинтегрируем с учётом начальных условий:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}^2}{2} &= -\frac{e}{m} \int_0^y E_y(\eta) d\eta - \frac{e^2}{m^2} \int_0^y B_x(\eta) d\eta \int_0^\eta B_x(\xi) d\xi = \\ &= \frac{e}{m} (\varphi(y) - \varphi(0)) - \frac{e^2}{m^2} \int_0^y B_x(\eta) d\eta \int_0^\eta B_x(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Условие достижения анода:

$$\frac{e}{m} \int_0^h B_x(\eta) d\eta \int_0^\eta B_x(\xi) d\xi = \varphi(y) - \varphi(0) = U.$$

Таким образом, условие не зависит от распределения поля E_y , но только от разности потенциалов U . Так как распределение магнитного поля в цилиндрической и в плоской системе совпадают, то и ответ для $I_{\text{кр}}$ (с точностью до подстановки $R_0 = r_0 + h$) остаётся прежним.

Ответ:

$$I_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{8Um}{e}} \frac{\pi}{\mu_0} \frac{1}{\ln\left(\frac{R_0}{r_0}\right)}$$

Примечание.

Можно показать, что

$$\int_0^h B_x(\eta) d\eta \int_0^\eta B_x(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \left(\int_0^h B_x(\xi) d\xi \right)^2.$$

Таким образом, условие на достижение электроном анода:

$$\int_0^h B_x(\xi) d\xi = \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Интересный факт заключается в том, что найденное условие зависит только от значений определённых интегралов электрического и магнитного поля по y , но не от конкретного распределения поля.

В1 0.30

Получите дифференциальное уравнение, связывающее $\varphi(y)$ и $\rho(y)$.

Метод 1

Запишем теорему Гаусса для двух плоскостей y и $y + dy$:

$$(E(y + dy) - E(y)) S = \frac{\rho(y)}{\varepsilon_0} S dy,$$

$$E'(y) = \frac{\rho(y)}{\varepsilon_0}.$$

С учётом связи

$$E(y) = -\varphi'(y)$$

получаем ответ.

Ответ:

$$\varphi''(y) = -\frac{\rho(y)}{\varepsilon_0}$$

Метод 2

Теорема Гаусса в дифференциальной форме:

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \operatorname{div} \vec{E}.$$

Связь E и φ :

$$E = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Тогда

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta \varphi,$$

здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа (лапласиан), само уравнение называется уравнением Лапласа.

В одномерном случае это преобразуется к виду

Ответ:

$$\varphi''(y) = -\frac{\rho(y)}{\varepsilon_0}$$

B2^{0.20}

Предположим, что $U > 0$. Найдите скорость электрона $v(y)$, эмиттированного с катода, на расстоянии y от катода. Ответ выразите через $\varphi(y)$.

Запишем закон сохранения энергии для электрона:

$$\frac{mv^2(y)}{2} - e\varphi(y) = 0.$$

Отсюда следует ответ.

Ответ:

$$v = \sqrt{\frac{2e\varphi(y)}{m}}$$

B3^{0.30}

Выразите полный ток I , протекающий через сечение $y = \text{const}$. Ответ выразите через $\rho(y)$, $v(y)$ и геометрические характеристики системы.

Положительным считайте направление тока от анода к катоду.

С учётом указанного положительного направления тока от анода к катоду

Ответ:

$$I = -\rho(y)v(y)S$$

B4^{0.40}

Получите дифференциальное уравнение на $\varphi(y)$, содержащее функцию $\varphi(y)$ и её производные, а также I и геометрические характеристики системы.

С учётом предыдущих пунктов:

$$\rho(y) = -\frac{I}{Sv(y)} = -\frac{I}{S}\sqrt{\frac{m}{2e\varphi(y)}}.$$

Постановка $\rho(y)$ в уравнение пункта В1 приводит к ответу

Ответ:

$$\varphi''(y) = \frac{I}{\varepsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e\varphi(y)}}$$

В5 0.80

Получите зависимость $\varphi(y)$. Ответ выразите через I и геометрические характеристики системы.

Домножая обе части уравнения пункта В4 на $\varphi'(y)$ и интегрируя с учётом $\varphi'(0) = 0$, приходим к уравнению

$$(\varphi')^2 = \frac{I}{\varepsilon_0 S} \sqrt{\frac{8m}{e}} \sqrt{\varphi}.$$

Переменные в нём разделяются:

$$\varphi^{-1/4} d\varphi = \left(\frac{I}{\varepsilon_0 S} \right)^{1/2} \left(\frac{8m}{e} \right)^{1/4} dy.$$

Применяя начальное условие $\varphi(0) = 0$, получим

$$\frac{4}{3} \varphi^{3/4} = \left(\frac{I}{\varepsilon_0 S} \right)^{1/2} \left(\frac{8m}{e} \right)^{1/4} y.$$

Преобразуя полученное выражение, приходим к ответу.

Ответ:

$$\varphi(y) = \left(\frac{3y}{4} \right)^{4/3} \left(\frac{I}{\varepsilon_0 S} \right)^{2/3} \left(\frac{8m}{e} \right)^{1/3}$$

В6 0.80

ВАХ лампы при $U > 0$ может быть выражен функцией

$$I(U) = GU^\gamma.$$

Определите коэффициенты G, γ . Ответ выразите через геометрические характеристики системы.
Величина G называется *первеансом* лампы.

Напряжение на лампе равно потенциалу в точке $y = h$:

$$U = \varphi(h) = \left(\frac{3h}{4} \right)^{4/3} \left(\frac{I}{\varepsilon_0 S} \right)^{2/3} \left(\frac{8m}{e} \right)^{1/3}.$$

Выразим ток:

$$I(U) = \varepsilon_0 S \left(\frac{4}{3h} \right)^2 \left(\frac{e}{8m} \right)^{1/2} U^{3/2}.$$

Тогда

Ответ:

$$G = \varepsilon_0 S \left(\frac{4}{3h} \right)^2 \left(\frac{e}{8m} \right)^{1/2}$$
$$\gamma = \frac{3}{2}$$

В7 0.50

Получите зависимость $\rho(y)$. Ответ выразите через I и геометрические характеристики системы.

Используя результаты пунктов В1 или В4, выражаем $\rho(y)$ через $\varphi(y)$:

$$\rho(y) = -\varepsilon_0 \cdot \varphi''(y) = -\frac{I}{S} \sqrt{\frac{m}{2e\varphi(y)}}.$$

Подставляя найденное $\varphi(y)$, приходим к ответу

Ответ:

$$\rho(y) = -\left(\frac{I}{3S}\right)^{2/3} \left(\frac{2m\varepsilon_0}{e}\right)^{1/3} \cdot y^{-2/3}$$

B8 ^{0.20} Получите ВАХ лампы $I(U)$ при $U < 0$.

При $U < 0$ поле направлено по оси y , и эмитированные с катода электроны не движутся к аноду, а значит $I = 0$.

Ответ:

$$I(U) = 0$$

B9 ^{0.60} Получите дифференциальное уравнение на $\varphi(r)$, содержащее функцию $\varphi(r)$ и её производные, а также полный ток в лампе I и геометрические характеристики системы.

Ток, текущий в цилиндрической конфигурации, равен

$$I = -2\pi r L \rho(r) v(r).$$

С учётом выражения для скорости получаем

$$\rho(r) = -\frac{I}{2\pi r L} \sqrt{\frac{m}{2e\varphi(r)}}$$

Метод 1

Рассмотрим цилиндрические поверхности длиной L и радиусами r и $r + dr$. Теорема Гаусса в этом случае запишется в виде:

$$2\pi L (E(r + dr)(r + dr) - E(r)r) = \frac{2\pi L r \rho(r) dr}{\varepsilon_0},$$
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE(r)) = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = -\frac{I}{2\pi r L \varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e\varphi(r)}}.$$

Используя $E(r) = -\varphi'(r)$, приходим к уравнению на потенциал.

Ответ:

$$r\varphi''(r) + \varphi'(r) = \frac{I}{2\pi L \varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e\varphi(r)}}$$

Метод 2

В методе 2 пункта B1 было получено

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Оператора Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

В силу осевой симметрии системы и $E_z = 0$ последние два слагаемых равны нулю. После подстановки ρ через I , получаем ответ.

Ответ:

$$r\varphi''(r) + \varphi'(r) = \frac{I}{2\pi L \varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e\varphi(r)}}$$

C1 ^{0.90} Закон Кирхгофа для RLC-контура приводит к дифференциальному уравнению вида

$$\ddot{U}_C + \zeta(1 + \eta U_C^2) \dot{U}_C + \chi U_C = 0.$$

Выразите ζ, η, χ через R, L, C, M, λ, μ .

Ток в RLC-контуре связан с напряжением конденсатора:

$$I = C\dot{U}_C.$$

Тогда для RLC-контура записывается закон Кирхгофа:

$$M\frac{dI_A}{dt} = U_C + RC\dot{U}_C + LC\ddot{U}_C \tag{1}$$

(с точностью до знака M). Используя выражение для $I_A(U_C)$, получим

$$\frac{dI_A}{dt} = \left(\lambda - 3\mu U_C^2\right)\dot{U}_C. \tag{2}$$

После подстановки (2) в (1) и сокращения на LC , приходим к уравнению

$$\ddot{U}_C + \left(\frac{R}{L} - \frac{\lambda M}{LC} + \frac{3\mu M}{LC}U_C^2\right)\dot{U}_C + \frac{U_C}{LC} = 0.$$

Сравнивая его с данным в условии, получаем ответ.

Ответ:

$$\zeta = \frac{R}{L} - \frac{\lambda M}{LC}$$

$$\eta = \frac{3\mu M}{RC - \lambda M}$$

$$\chi = \frac{1}{LC}$$

C2^{1.20}

Пусть U_C отклоняется от нуля на малую величину. Получите условие на параметры ζ , η , χ , при котором происходит раскачка колебаний. Выразите также полученное условие в терминах R , L , C , M , λ , μ .

При малых U_C можно пренебречь членом $\sim U_C^2$ в уравнении и записать его в виде:

$$\ddot{U}_C + \zeta\dot{U}_C + \chi U_C = 0.$$

Метод 1 (математический)

Введём обозначения:

$$\zeta = 2\gamma, \qquad \chi = \omega_0^2.$$

Как известно, решение такого дифференциального уравнения имеет разный вид в зависимости от параметров γ , ω_0 .

1. $\gamma^2 < \omega_0^2$

$$U_C(t) = e^{-\gamma t} \left(A \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t\right) + B \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t\right) \right).$$

2. $\gamma^2 = \omega_0^2$

$$U_C(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt).$$

3. $\gamma^2 > \omega_0^2$

$$U_C(t) = e^{-\gamma t} \left(A \exp\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t\right) + B \exp\left(-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cdot t\right) \right).$$

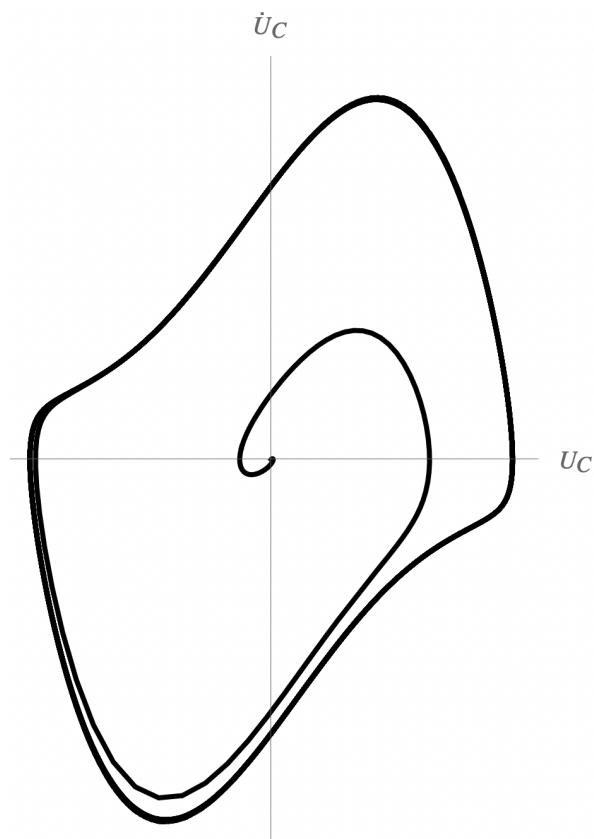
Второй случай не имеет физического смысла, так как требуется точное выполнение условия $\gamma^2 = \omega_0^2$. В остальных случаях, как видно, раскачка возможна только при условии $\gamma < 0$, то есть $\zeta < 0$.

Ответ:

$$\zeta < 0$$

$$RC < \lambda M$$

В третьем случае это не приводит к экспоненциальному росту U_C , так как полученное линейное уравнение верно лишь при малых U_C . Характерная фазовая диаграмма точного решения представлена на рисунке.



Метод 2 (энергетический)

Энергия в RLC-контуре:

$$W = \frac{CU_c^2}{2} + \frac{LC^2\dot{U}_c^2}{2}.$$

Продифференцируем по времени:

$$\dot{W} = CU_c\dot{U}_c + LC^2\dot{U}_c\ddot{U}_c = C\dot{U}_c(U_c + LC\ddot{U}_c).$$

Подставим $\ddot{U}_c$ из исходного уравнения, выразив его через $\dot{U}_c, U_c$. После преобразований приходим к выражению

$$\dot{W} = C\dot{U}_c^2(M\lambda - RC - 3\mu MU_c^2).$$

При малых U_c :

$$\dot{W} \simeq C\dot{U}_c^2(M\lambda - RC).$$

Для раскачки колебаний необходимо $\dot{W} > 0$, что эквивалентно

Ответ:

$$\zeta < 0$$

$$RC < \lambda M$$