

Road to IPhO

Вращающаяся среда (11 баллов)

Большинство физических систем не являются консервативными из-за наличия диссипативных сил. Примером таких сил может быть трение. В этой задаче мы рассмотрим примеры таких систем с простейшим случаем вязкого трения.

Часть А. Неподвижная среда (4 балла)

Пусть частица массой m движется в неподвижной среде, в которой на неё действует сила вязкого трения $\vec{F}_{\text{тр}} = -\varepsilon m \vec{v}$, где $\vec{v}$ – скорость частицы. Ускорение свободного падения $\vec{g}$, изначально частица находилась в начале координат и имела скорость $\vec{v}_0$.

A1 Найдите траекторию движения $\vec{r}(t)$ для этой частицы. Выразите ответ в векторном виде через $\vec{v}_0$, $\vec{g}$, ε или выразите зависимости компонент вектора $\vec{r}(t)$ в декартовой системе координат через компоненты векторов $\vec{v}_0$, $\vec{g}$. **1.3**

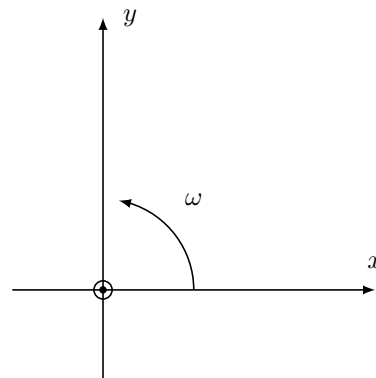
A2 Как зависит от времени мощность потерь энергии $P(t)$, которая уходит в тепло? Выразите ответ через $\vec{v}_0$, $\vec{g}$, ε , t , m . **0.7**

Рассмотрим теперь движение частицы в отсутствии силы тяжести, но теперь на неё действует постоянная по модулю вращающаяся сила $F_x = F_0 \cos(\omega t)$, $F_y = F_0 \sin(\omega t)$.

A3 Найдите мощность потерь P , которая уходит в тепло, через большое время после включения силы $t \gg 1/\varepsilon$. Выразите ответ через F_0 , ε , m , ω . **2.0**

Часть В. Вращающаяся среда (7 баллов)

Частица массой m находится в среде, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси z , ускорение свободного падения $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, сила трения $\vec{F} = -\varepsilon m \vec{v}_{\text{отн}}$, где $\vec{v}_{\text{отн}}$ – скорость частицы относительно среды. В начальный момент частица неподвижна и находится в точке с координатами $(x_0, y_0, z_0) = (r_0, 0, 0)$.



B1 Найдите зависимость $z(t)$. Выразите ответ через r_0 , ε , g . **0.5**

B2 Выразите $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ через x , y , $\dot{x}$, $\dot{y}$, ε и ω . **1.0**

Известно, что у полученных вами уравнений есть решение вида

$$(x(t), y(t)) = (Ae^{at} \cos(\Omega t + \varphi_0), Ae^{at} \sin(\Omega t + \varphi_0)).$$

Эти функции являются решениями при произвольных значениях φ_0 , в частности при $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi/2$ получим

$$(x_1(t), y_1(t)) = (Ae^{at} \cos(\Omega t), Ae^{at} \sin(\Omega t)),$$

$$(x_2(t), y_2(t)) = (-Ae^{at} \sin(\Omega t), Ae^{at} \cos(\Omega t)).$$

При этом существует две пары возможных значений параметров (a, Ω) .

B3 Используя решение (x_1, y_1) , получите систему уравнений, из которой можно определить возможные значения постоянных a и Ω . В ответ также могут входить ε , ω . **1.0**

Road to IPhO

B4 Решите полученную систему уравнений и найдите подходящие пары значений (a_1, Ω_1) и (a_2, Ω_2) , если $a_2 > a_1$. Выразите ответ через ε, ω . **1.0**

B5 Найдите приближённые значения этих величин в случаях $\varepsilon \ll \omega$ и $\varepsilon \gg \omega$. **0.5**

В дальнейшем будем использовать обозначения

$$A\vec{r}_{1i} = (Ae^{a_it} \cos(\Omega_i t), Ae^{a_it} \sin(\Omega_i t)), \quad A\vec{r}_{2i} = (-Ae^{a_it} \sin(\Omega_i t), Ae^{a_it} \cos(\Omega_i t)).$$

Здесь индекс i может принимать два значения 1, 2, отвечающие двум возможным значениям (a, Ω) .

B6 Произвольное решение системы уравнений имеет вид **1.5**

$$(x(t), y(t)) = A\vec{r}_{11} + B\vec{r}_{12} + C\vec{r}_{21} + D\vec{r}_{22}.$$

Используя начальные условия, приведенные во введении к части, выразите A, B, C и D через r_0, a_1, a_2, Ω_1 и Ω_2 .

B7 Нарисуйте качественно траекторию движения частицы в плоскости xy для случаев $\varepsilon \ll \omega$ и $\varepsilon \gg \omega$. **0.5**

B8 Найдите мощность потерь энергии P , которая уходит в тепло, в момент, когда частица находится в точке с координатами $\vec{r} = (x, y, z)$ и движется со скоростью $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. **1.0**