

Road to IPhO

Измерение вязкости смеси

В этой задаче исследуется зависимость вязкости смеси глицерина и воды от температуры и их относительной концентрации. Вязкость – это способность жидкости сопротивляться течению. Чем жидкость более вязкая, тем труднее ее прокачать по трубам, а значит, возникает необходимость применять более мощные насосы и более крепкие трубы, рассчитанные на повышенное давление.

Примечание для обработки данных

Существует несколько способов численного решения уравнений. **Метод простой итерации (МПИ)** – один из простейших методов численного решения уравнений. Его удобно использовать для численного нахождения величин, заданных неявно как решение некоторого уравнения. Чтобы решить уравнение с помощью МПИ, его необходимо представить в виде

$$x = f(x). \quad (1)$$

Подставляя в качестве аргумента функции начальное приближение x_0 , мы получим первое приближение x_1 . Далее, подставляя x_1 в качестве аргумента функции, мы получим уже второе приближение x_2 , и т.д. Функцию $f(x)$ всегда можно выбрать так, чтобы разница между последовательными приближениями уменьшалась, а результат вычислений становился всё ближе к правильному ответу. Для этого нужно, чтобы в достаточно большой окрестности правильного ответа производная функции $f(x)$ была по модулю меньше единицы. Если это не так, самый простой способ – переопределить $f(x)$:

$$f(x) \rightarrow ax + (1 - a)f(x).$$

Это преобразование инвариантно относительно уравнения (1) и на практике почти всегда позволяет достичь сходимости при должном подборе $a \in \mathbb{R}$. Поскольку для хранения промежуточного значения в калькуляторе используется переменная `Ans`, практическая реализация МПИ состоит в том, чтобы приравнять `Ans` к начальному приближению и начать много раз вычислять $f(\text{Ans})$. При правильном подборе функции $f(x)$ результат вычислений быстро сойдётся к правильному ответу. Другой популярный метод численного решения уравнений – **метод деления отрезка**. Чаще всего встречается деление отрезка пополам. Суть метода состоит в последовательном уменьшении отрезка, внутри которого лежит искомое решение уравнения. Для этого на каждой итерации этот отрезок делится на равные части, левая и правая части уравнения вычисляются в полученных точках, и в качестве нового отрезка выбирается тот, на котором разность левой и правой частей меняет знак. В качестве оценки для корня обычно выбирают середину отрезка. Один из вариантов практической реализации деления отрезка – использование режима **Table**, который поддерживают некоторые модели калькуляторов. Этот режим позволяет рассчитать значения заданной функции с равным шагом в заданном диапазоне аргумента. Обычно памяти калькулятора хватает на вычисление функции примерно в 20–25 точках, поэтому на каждой итерации можно эффективно делить отрезок примерно в 20 раз.

Введение

Для смеси воды и глицерина зависимость температуры стеклования от массовой доли глицерина w_g можно с хорошей точностью описать многочленом:

$$T_g(\text{K}) = 140.3 + 35.272w_g - 3.879w_g^2 + 23.467w_g^3. \quad (2)$$

Используя данное выражение и зная температуру стеклования, можно определить значение концентрации методом простой итерации.

Считайте известными следующие численные данные:

- Плотность глицерина при $T = 25^\circ\text{C}$ равна $\rho_g = 1260 \text{ кг/м}^3$;
- Плотность воды $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$;
- Молярная масса глицерина $\mu_g = 92 \text{ г/моль}$;
- Молярная масса воды $\mu_w = 18 \text{ г/моль}$.

Во всех частях задачи вы можете считать объем смеси равным сумме объемов составляющих этой смеси.

Road to IPhO

Часть А. Зависимость вязкости от концентрации (3.5 балла)

В общем случае задачу о вязкости смеси веществ решить не представляется возможным, однако для смеси воды и глицерина можно воспользоваться эмпирической формулой:

$$\eta = \xi \cdot \frac{\exp(-kn_w)}{1 + a \cdot \exp(-bn_w)}.$$

Если значение молярной доли воды в смеси достаточно мало, то можно считать, что $a \cdot \exp(-bn_w) \ll 1$. Поэтому для упрощения анализа представленной зависимости предлагается использовать приближение, работающее только **при малых** молярных долях воды:

$$\eta = \xi \cdot \exp(-kn_w).$$

В таблице представлена экспериментальная зависимость вязкости от температуры стеклования смеси глицерина и воды. Измерения производились при температуре $T = 25^\circ\text{C}$.

A1 Выразите молярную долю воды n_w в растворе через массовую долю глицерина w_g , μ_w и μ_g . **0.2**

A2 Используя уравнение (1), пересчитайте значения T_g в значения w_g . **1.5**

A3 Предложите линеаризацию, описывающую систему с малой молярной долей воды, с помощью которой можно будет определить параметры ξ и k . Постройте график линеаризованной зависимости. Определите параметры ξ и k , используя полученный график. **0.6**

A4 Зная параметры ξ и k предложите линеаризацию, позволяющую определить значения параметров a и b . Постройте график линеаризованной зависимости. По прямолинейному участку определите a и b . **0.5**

A5 Постройте на одной миллиметровке график теоретической и экспериментальной зависимости $\eta(n_w)$. Укажите диапазон применимости полученного уравнения. **0.7**

Часть В. А как зависит вязкость от температуры? (1.9 балла)

При низких температурах, близких к температуре стеклования удобно использовать уравнение Вогеля-Таммана-Фульхера (VTF):

$$\eta = \eta_0 \cdot \exp\left(\frac{DT_0}{T - T_0}\right)$$

для описания зависимости вязкости η от температуры T , где η_0 и T_0 — константы, D — константа, обратно пропорциональная хрупкости вещества. Значение D положительно для всех веществ. В таблице представлена экспериментальная зависимость вязкости смеси от температуры. Измерения производились со смесью с объемной долей глицерина $c_g = 0.5$.

B1 Используя уравнение (2), определите температуру стеклования раствора. **0.4**

Теперь примите $\eta_0 = 3.33 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}$.

B2 Предложите линеаризацию, позволяющую определить значения параметров D и T_0 . Построив график линеаризованной зависимости или используя метод наименьших квадратов (МНК), определите значения параметров. **1.5**

Road to IPhO

Часть С. Определение вязкости разными способами (0.8 балла)

В данной части задачи предлагается найти численное значение вязкости смеси с помощью двух полученных ранее зависимостей. Для возможности сравнения полученных результатов в обоих случаях смесь находится в одинаковых условиях.

C1 Определите вязкость смеси η_n при объемной доле глицерина $c_g = 0.5$ и температуре $T = 25^\circ\text{C}$, используя зависимость от молярной доли воды. **0.3**

C2 Определите вязкость смеси η_t при тех же условиях, используя зависимость от температуры. **0.3**

C3 Сравните полученные результаты. Если есть расхождения, объясните причину их возникновения. **0.2**

Часть D. Течение вязкой смеси (3.8 балла)

Помимо снижения вязкости, ток жидкости можно улучшить при помощи супергидрофобной поверхности. Такие поверхности не смачиваются водой: капли на них остаются лежать в виде шарика. Между шершавой гидрофобной поверхностью определенного вида и жидкостью возникает воздушный зазор – пластрон, который уменьшает площадь контакта двух сред и облегчает протекание. Ученые под руководством Майи Вуковач (Maja Vuckovac) из Университета Аалто изучали взаимодействия шершавой супергидрофобной поверхности с густыми жидкостями. Исследователи соорудили вертикальные капилляры из коммерчески доступного супергидрофобного материала (Hydrobead), закрытые с одной или с двух сторон. В эти капилляры заливали жидкости с разной вязкостью, в том числе воду, глицерин и полиэтиленгликоль, которые затем стекали вниз под действием силы тяжести. В итоге физики обнаружили, что в такой конфигурации поток тем быстрее, чем выше вязкость. Для того чтобы объяснить феномен, исследователи ввели в жидкости частицы-трекеры и начали наблюдать за стекающими каплями на микроуровне, в том числе за потоками внутри самой капли. Оказалось, что в каплях с низкой и средней вязкостью возникает асимметричный круговой поток, как если бы внутри бутылки вода шла от дна к горлышку по одной стенке и обратно по другой. Чем гуще жидкость, тем слабее этот эффект, поэтому **при слишком больших вязкостях жидкости в гидрофильном и гидрофобном капиллярах ведут себя одинаково**.

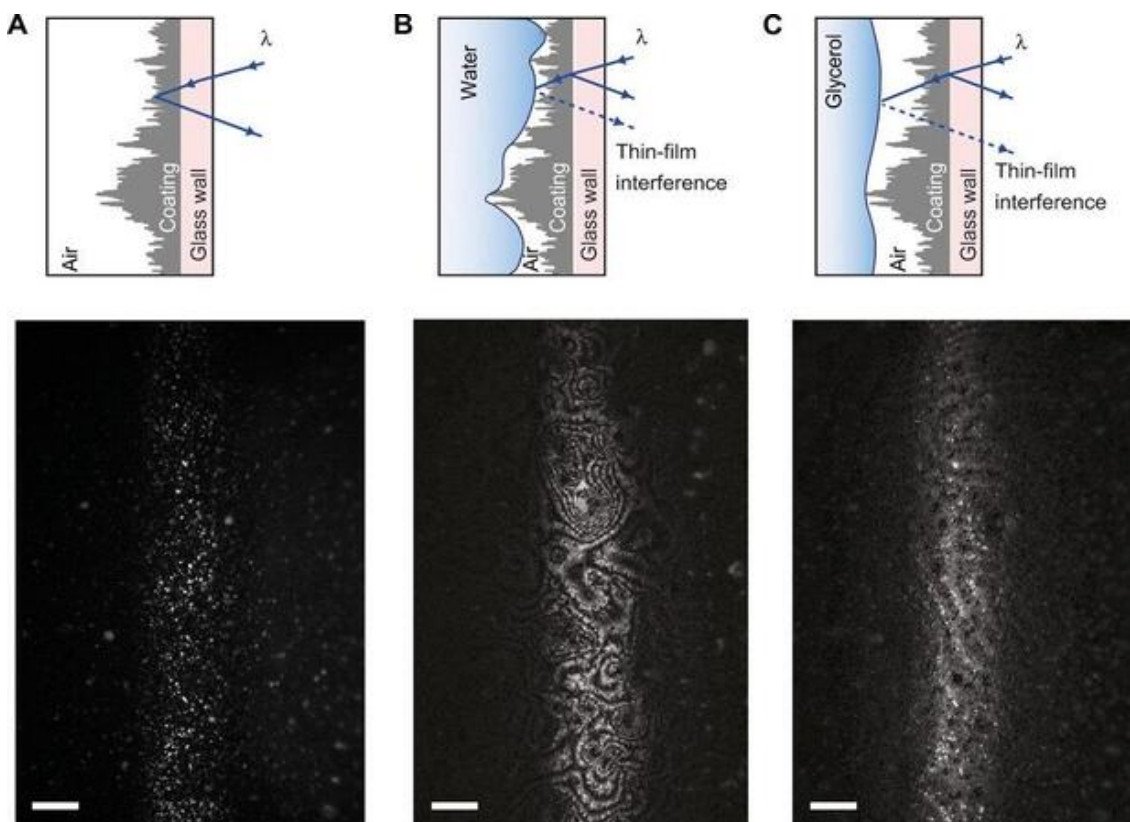


Рис.1. Течение жидкости под микроскопом

Road to IPhO

В следующем эксперименте использовались 2 одинаковых цилиндрических капилляра, поверхность одного из которых гладкая, а другая гидрофобная. По этим капиллярам течет смесь воды и глицерина. В случае **гидрофильного** капилляра зависимость объёмного расхода жидкости от вязкости представляется уравнением:

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8 \eta L},$$

где r – радиус капилляра, L – его длина, $\Delta P = \rho g L$ – разность давлений на концах капилляра, ρ – плотность смеси. Все параметры, кроме вязкости и плотности смеси поддерживаются постоянными и одинаковыми для обоих капилляров. Вы можете пользоваться уравнением, связывающим вязкость смеси и молярную концентрацию воды, полученным в части **A**, считая, что температуры смесей в частях **A** и **D** совпадают. Плотность смеси не постоянна т.к. концентрации глицерина в смеси разные, однако при $\eta > \xi$ считайте плотность смеси равной плотности глицерина $\rho = \rho_g$. Были получены зависимости скоростей течения в гидрофобном капилляре $v_1(\eta)$ и в гидрофильном – $v_2(\eta)$. Полученные данные представлены в таблице ниже:

D1	Восстановите недостающие значения v_2 в таблице. Используйте для этого линеаризованный график зависимости $v_2(\eta)$. Используйте пустые столбцы таблицы в листе ответов для пересчета необходимых величин.	2.0
-----------	---	------------

Теперь вы можете восстановить зависимость $v_1(\eta)$. Эта зависимость имеет несколько характерных особенностей при сильно разных (отличающихся на несколько порядков) значениях вязкости, что затрудняет графический анализ этой зависимости.

D2	Постройте график $v_1(\eta)$ в диапазоне от $\eta_1 = 10^{-3}$ Па · с до $\eta_2 = 10^3$ Па · с в максимально удобных для графического анализа координатах. Все точки, нанесенные на график, должны быть занесены в таблицу в листе ответов.	1.5
-----------	--	------------

D3	Определите значение вязкости смеси η_{max} такое, что значение $v_2(\eta_{max})$ максимально.	0.3
-----------	--	------------