

A1 0.50 Определите зависимость внутренней энергии такого газа от температуры. Считайте, что при $T = 0$ внутренняя энергия равна нулю.

Запишем малое приращение внутренней энергии газа:

$$dU = C_V dT = (C_0 + aT) dT$$

Интегрируя, получим:

Ответ:

$$U = C_0 T + \frac{aT^2}{2}$$

A2 0.30 Чему равна теплоемкость газа C_P при постоянном давлении при заданной температуре T ?

Согласно уравнению Майера:

$$C_P = C_V + R \cdot 1 \text{ моль}$$

здесь и далее мы опускаем множитель 1 моль во всех выражениях.
Отсюда получим:

Ответ:

$$C_P = C_0 + aT + R$$

A3 0.40 Пусть с газом производится изохорный процесс, при котором давление увеличивается от p_1 до p_2 , объем равен V . Найдите подведенное количество теплоты Q_V .

Запишем I начало термодинамики:

$$dQ = dU + dA$$

Процесс изохорный, поэтому работу газ не совершает, и

$$Q_V = \Delta U = C_0 \Delta T + \frac{a(T_2^2 - T_1^2)}{2}$$

Уравнение состояния идеального газа:

$$pV = RT,$$

откуда можно найти значения температур в начале и в конце процесса:

$$T_1 = \frac{p_1 V}{R}$$
$$T_2 = \frac{p_2 V}{R}$$

Выразим ответ через данные в условии величины:

Ответ:

$$Q_V = \frac{C_0(p_2 - p_1)V}{R} + \frac{a(p_2^2 - p_1^2)V^2}{2R^2}$$

A4 0.40 Пусть с газом производится изобарный процесс, начальный объем равен V_1 , конечный V_2 , давление p . Найдите подведенное количество теплоты Q_P .

Выразим малое приращение теплоты:

$$dQ = C_P dT = (C_0 + aT + R) dT$$

Интегрируя, получим ответ, аналогичный предыдущему пункту:

$$Q_P = (C_0 + R) \Delta T + \frac{a(T_2^2 - T_1^2)}{2}$$

Через уравнение состояния получим температуры в начале и в конце процесса:

$$T_1 = \frac{pV_1}{R}$$
$$T_2 = \frac{pV_2}{R}$$

Выразим в ответ через данные в условии величины:

Ответ:

$$Q_P = \frac{(C_0 + R)(V_2 - V_1)p}{R} + \frac{a(V_2^2 - V_1^2)p^2}{2R^2}$$

A5^{1.50} Рассмотрим цикл 123, состоящий из процесса 1 — 2, в котором давление прямо пропорционально объему, изохоры 2 — 3 и изобары 3 — 1. При этом известно, что $V_2 = 2V_1$, а теплоемкости при постоянных объемах в точках 1 и 2 связаны соотношением $C_{V2} = 1.5C_{V1}$. Определите коэффициент полезного действия этого цикла. Найдите численное значение. Значение $C_0 = 3R/2$.

Уравнение состояния:

$$pV = RT$$

В процессе 1 — 2 выполняется $p = \alpha V$, значит $T \propto V^2$, поэтому $T_2 = 4T_1$, $p_2 = 2p_1$, $\alpha V_1^2 = RT_1$.

Запишем соотношение из условия:

$$C_0 + aT_2 = C_0 + 4aT_1 = 1.5(C_0 + aT_1),$$

откуда следует:

$$C_0 = 5aT_1$$

Теплота подводится только на участке 1 — 2 (температура монотонно возрастает), а отводится только на участке 3 — 1 (температура монотонно убывает).

Найдем подведенную теплоту:

$$dQ = C_V dT + p dV = (C_0 + aT) dT + \alpha V dV$$

После интегрирования получаем:

$$Q_+ = C_0 \cdot (4T_1 - T_1) + a \cdot \frac{16T_1^2 - T_1^2}{2} + \alpha \cdot \frac{4V_1^2 - V_1^2}{2} = \frac{9}{2}C_0T_1 + \frac{3}{2}RT_1 = \frac{33}{4}RT_1$$

Теперь найдем работу газа: на участке 1 — 2 $A_{12} = \frac{3}{2}RT_1$, участок 2 — 3 - изохора, поэтому $A_{23} = 0$, на последнем участке при давлении p_1 объем меняется с $2V_1$ до V_1 , поэтому $A_{31} = -p_1V_1 = -RT_1$.

Суммарная работа газа $A = \frac{RT_1}{2}$, КПД находим как

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{2}{33}$$

Ответ:

$$\eta = \frac{2}{33}$$

A6^{0.50} Рассмотрим адиабатический процесс, совершаемый с газом. Получите соотношение между бесконечно малыми приращениями объема dV и температуры dT . Ответ выразите через C_0 , a , T , V , R .

Приравняем к нулю малое приращение теплоты:

$$dQ = C_V dT + p dV = 0$$

Из уравнения состояния:

$$p = \frac{RT}{V}$$

Отсюда имеем:

$$(C_0 + aT)dT + \frac{RT}{V}dV = 0$$

Ответ:

$$(C_0 + aT)dT + \frac{RT}{V}dV = 0$$

A7^{0.90} Из соотношения в предыдущем пункте получите уравнение адиабаты, связывающее T и V вида

$$f(T, V) = \text{const},$$

в функцию f могут также входить C_0, a, R .

Поделив выражение из предыдущего пункта на T , получим:

$$\left(\frac{C_0}{T} + a\right)dT + \frac{R}{V}dV = 0$$

Интегрируя, получим:

$$f(T, V) = C_0 \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} + aT = \text{const}$$

Здесь T_0, V_0 - произвольные константы для обеспечения безразмерной величины под логарифмом. Опуская данную формальность, представим ответ через данные в условии величины:

Ответ:

$$f(T, V) = C_0 \ln T + R \ln V + aT = \text{const}$$

A8^{0.40} Рассмотрим цикл Карно 1234, состоящий из изотерм 12 и 34 и адиабат 23 и 41. Выразите объемы V_3, V_4 через V_1, V_2 , температуры на изотермах $T_+ = T_1 = T_2, T_- = T_3 = T_4$ и параметры газа C_0, a, R .

Запишем выражение из предыдущего пункта для адиабаты 2 – 3:

$$C_0 \ln T_+ + R \ln V_2 + aT_+ = C_0 \ln T_- + R \ln V_3 + aT_-,$$

которое преобразуется в:

$$R \ln \frac{V_3}{V_2} = C_0 \ln \frac{T_+}{T_-} + a(T_+ - T_-),$$

откуда следует:

$$V_3 = V_2 \left(\frac{T_+}{T_-} \right)^{\frac{C_0}{R}} \exp \left[\frac{a(T_+ - T_-)}{R} \right]$$

Аналогично запишем для адиабаты 4 – 1:

$$C_0 \ln T_- + R \ln V_4 + aT_- = C_0 \ln T_+ + R \ln V_1 + aT_+,$$

что преобразуется в:

$$V_4 = V_1 \left(\frac{T_+}{T_-} \right)^{\frac{C_0}{R}} \exp \left[\frac{a(T_+ - T_-)}{R} \right]$$

Ответ:

$$V_3 = V_2 \left(\frac{T_+}{T_-} \right)^{\frac{C_0}{R}} \exp \left[\frac{a(T_+ - T_-)}{R} \right]$$

$$V_4 = V_1 \left(\frac{T_+}{T_-} \right)^{\frac{C_0}{R}} \exp \left[\frac{a(T_+ - T_-)}{R} \right]$$

A9^{0.80} Прямым вычислением (не используя общей формулы) покажите, что коэффициент полезного действия цикла Карно такой же, как и для идеального газа с постоянной теплоемкостью.

Тепло может подводиться и отводиться только на изотермах (на 1 – 2 оно подводится, на 3 – 4 – отводится).

$$dQ = dU + dA = dA = p dV$$

($dU = C_V dT = 0$ т.к. процесс изотермический)

$$pV = RT,$$

тогда

$$dQ_+ = RT_+ \frac{dV}{V},$$

$$Q_+ = RT_+ \ln \frac{V_2}{V_1},$$

аналогично:

$$Q_- = RT_- \ln \frac{V_4}{V_3}$$

Из предыдущего пункта:

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}$$

Выразим КПД:

$$\eta_1 = 1 + \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{T_-}{T_+}$$

КПД цикла Карно:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_-}{T_+},$$

откуда следует, что выражения для КПД совпадают.

Ответ: КПД цикла совпадает с КПД цикла Карно.

В1 1.00

Найдите количество теплоты, которое нужно подвести к газу при изохорном нагревании Q_V . Выразите ответ через T_1 , R .

На линейном участке $C_V = C_0 + aT$. Получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_0 + aT_1 = 3R/2 \\ C_0 + 2aT_1 = 5R/2 \end{cases}$$

Из этой системы следует:

$$aT_1 = R$$

$$C_0 = R/2$$

Найдем Q_V :

$$Q_V = \int_{T_1/2}^{3T_1} C_V dT = \frac{3R}{2} \left(T_1 - \frac{T_1}{2}\right) + \frac{5R}{2}(3T_1 - 2T_1) + \int_{T_1}^{2T_1} \left(\frac{R}{2} + \frac{RT}{T_1}\right) dT$$

$$Q_V = \frac{3RT_1}{4} + \frac{5RT_1}{2} + 2RT_1 = \frac{21}{4}RT_1$$

Ответ:

$$Q_V = \frac{21}{4}RT_1$$

В2 0.50

Найдите количество теплоты, которое нужно подвести к газу при изобарном нагревании Q_P . Выразите ответ через T_1 , R .

$$C_P = C_V + R,$$

поэтому:

$$Q_P = Q_V + R\Delta T = \frac{21}{4}RT_1 + \frac{5}{2}RT_1 = \frac{31}{4}RT_1$$

Ответ:

$$Q_P = \frac{31}{4}RT_1$$

В3 1.80

Пусть начальный объем газа равен V_0 . Чему будет равен конечный объем, если увеличение температуры производилось адиабатически? Найдите совершенную в этом процессе работу. Выразите ответы через T_1 , R , V_0 .

Если в адиабатическом процессе с линейно зависящей от температуры теплоемкостью $C_V = C_0 + aT$ температура изменяется от T_{1x} до T_{2x} , а объем от V_1 до V_2 соответственно, то объемы в начале и в конце связаны следующим образом:

$$V_2 = V_1 \left(\frac{T_{1x}}{T_{2x}}\right)^{\frac{C_0}{R}} \exp\left[\frac{a(T_{1x} - T_{2x})}{R}\right]$$

Процесс можно разделить на три линейных процесса с параметрами:

$$C_0 = 3R/2, \ a = 0, \ T_{1x} = T_1/2, \ T_{2x} = T_1$$
$$C_0 = R/2, \ aT_1 = R, \ T_{1x} = T_1, \ T_{2x} = 2T_1$$
$$C_0 = 5R/2, \ a = 0, \ T_{1x} = 2T_1, \ T_{2x} = 3T_1$$

Тогда в конце 1 процесса:

$$V_1 = \frac{V_0}{2\sqrt{2}}$$

В конце 2 процесса:

$$V_2 = \frac{V_1}{e\sqrt{2}} = \frac{V_0}{4e}$$

В конце 3 процесса:

$$V_3 = V = \frac{4\sqrt{2}V_2}{9\sqrt{3}} = \frac{V_0\sqrt{2}}{9e\sqrt{3}}$$

Найдем работу газа в адиабатическом процессе:

$$A = -\Delta U = -Q_V = -\frac{21}{4}RT_1$$

Ответ:

$$V = \frac{V_0\sqrt{2}}{9e\sqrt{3}}$$

$$A = -\frac{21}{4}RT_1$$