

A1 1.30 Найдите траекторию движения $\vec{r}(t)$ для этой частицы. Выразите ответ в векторном виде через $\vec{v}_0, \vec{g}, \varepsilon$ или выразите зависимости компонент вектора $\vec{r}(t)$ в декартовой системе координат через компоненты векторов $\vec{v}_0, \vec{g}$.

Второй закон Ньютона:

$$m\dot{\vec{v}} = -\varepsilon m\vec{v} + m\vec{g}.$$

Разобьём скорость на два слагаемых:

$$\vec{v}(t) = \vec{u}(t) + \frac{\vec{g}}{\varepsilon}.$$

Уравнение на $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{u}} &= -\varepsilon\vec{u}. \\ \vec{v}(t) &= \frac{\vec{g}}{\varepsilon} + \left(\vec{v}_0 - \frac{\vec{g}}{\varepsilon}\right)e^{-\varepsilon t}\end{aligned}$$

Ответ:

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{g}t}{\varepsilon} + \left(\vec{v}_0 - \frac{\vec{g}}{\varepsilon}\right)\frac{1 - e^{-\varepsilon t}}{\varepsilon}$$

A2 0.70 Как зависит от времени мощность потерь энергии $P(t)$, которая уходит в тепло? Выразите ответ через $\vec{v}_0, \vec{g}, \varepsilon, t, m$.

Запишем закон изменения энергии системы частица+среда:

$$\begin{aligned}m\left(\vec{v}, \dot{\vec{v}}\right) &= m\left(\vec{v}, \vec{g}\right) - P. \\ P &= -m\left(\vec{v}, \dot{\vec{v}} - \vec{g}\right) = \varepsilon m v^2 \\ \vec{v}(t) &= \frac{\vec{g}}{\varepsilon}\left(1 - e^{-\varepsilon t}\right) + \vec{v}_0 e^{-\varepsilon t} \\ v^2 &= \frac{g^2\left(1 - e^{-\varepsilon t}\right)^2}{\varepsilon^2} + v_0^2 e^{-2\varepsilon t} + \frac{2\left(\vec{v}_0, \vec{g}\right)}{\varepsilon}\left(1 - e^{-\varepsilon t}\right)e^{-\varepsilon t}\end{aligned}$$

Ответ:

$$P = \varepsilon m \left(\frac{g^2(1 - e^{-\varepsilon t})^2}{\varepsilon^2} + v_0^2 e^{-2\varepsilon t} + \frac{2(\vec{v}_0, \vec{g})}{\varepsilon}(1 - e^{-\varepsilon t})e^{-\varepsilon t} \right)$$

A3 2.00 Найдите мощность потерь P , которая уходит в тепло, через большое время после включения силы $t \gg 1/\varepsilon$. Выразите ответ через $F_0, \varepsilon, m, \omega$.

За время $t \gg 1/\varepsilon$ движение устанавливается, при этом из изотропии системы понятно, что движение будет происходить по окружности с угловой скоростью ω и постоянной по модулю скоростью u . При этом угол между скоростью и силой постоянен и равен α . Запишем второй закон Ньютона в проекции на направление скорости и на нормаль к нему.

$$\begin{aligned}\begin{cases} 0 = F_0 \cos \alpha - \varepsilon m u \\ m u \omega = F_0 \sin \alpha \end{cases} \\ \tan \alpha = \frac{\omega}{\varepsilon} \\ u = \frac{F_0 \cos \alpha}{\varepsilon m} = \frac{F_0}{\varepsilon m} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} = \frac{F_0}{m \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}}\end{aligned}$$

Закон изменения энергии для системы:

$$P = F_0 u \cos \alpha = \frac{F_0^2 \varepsilon}{m(\varepsilon^2 + \omega^2)}.$$

Ответ:

$$P = \frac{F_0^2 \varepsilon}{m(\varepsilon^2 + \omega^2)}$$

B1 0.50 Найдите зависимость $z(t)$. Выразите ответ через r_0, ε, g .

Проекция второго закона Ньютона в проекции на ось z :

$$m\ddot{z} = -mg - \varepsilon m\dot{z}.$$
$$\ddot{z} = -g - \varepsilon\dot{z}$$

Решаем аналогично прошлой части задачи.

Ответ:

$$z(t) = -\frac{gt}{\varepsilon} + \frac{g(1 - e^{-\varepsilon t})}{\varepsilon^2}$$

B2 1.00 Выразите $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ через $x, y, \dot{x}, \dot{y}, \varepsilon$ и ω .

Второй закон Ньютона:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \varepsilon m \left([\vec{\omega}, \vec{r}] - \dot{\vec{r}} \right).$$

В проекции на оси x и y :

Ответ:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \varepsilon(-\omega y - \dot{x}) \\ \ddot{y} = \varepsilon(\omega x - \dot{y}) \end{cases}$$

B3 1.00 Используя решение (x_1, y_1) , получите систему уравнений, из которой можно определить возможные значения постоянных a и Ω . В ответ также могут входить ε, ω .

Первый метод

Заметим, что достаточно рассмотреть одно из решение, так как другое получено поворотом системы относительно оси z , поэтому из симметрии коэффициенты зависимостей не поменяются. Подставим в ответ из прошлого пункта первый вариант решения.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ae^{at} \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Ae^{at} \begin{pmatrix} a \cos(\Omega t) - \Omega \sin(\Omega t) \\ a \sin(\Omega t) + \Omega \cos(\Omega t) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = Ae^{at} \begin{pmatrix} (a^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t) - 2a\Omega \sin(\Omega t) \\ (a^2 - \Omega^2) \sin(\Omega t) + 2a\Omega \cos(\Omega t) \end{pmatrix}$$

Подставим в ответ прошлого пункта:

$$\begin{pmatrix} (a^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t) - 2a\Omega \sin(\Omega t) \\ (a^2 - \Omega^2) \sin(\Omega t) + 2a\Omega \cos(\Omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon\omega \sin(\Omega t) \\ \varepsilon\omega \cos(\Omega t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a\varepsilon \cos(\Omega t) - \varepsilon\Omega \sin(\Omega t) \\ a\varepsilon \sin(\Omega t) + \varepsilon\Omega \cos(\Omega t) \end{pmatrix}$$

Приравниваем коэффициенты перед синусами и косинусами получим систему уравнение на a и Ω :

$$\begin{cases} a^2 - \Omega^2 = -a\varepsilon \\ 2a\Omega = \varepsilon\omega - \varepsilon\Omega \end{cases}$$

Второй метод

Рассмотрим плоское движение в полярных координатах (r, φ) .

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + \dot{\varphi}r\vec{e}_\varphi$$
$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r)\vec{e}_r + (\ddot{\varphi}r + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Запишем второй закон Ньютона в проекции на $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$:

$$\begin{cases} \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r = -\varepsilon\dot{r} \\ \ddot{\varphi}r + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \varepsilon(\omega r - \dot{\varphi}r) \end{cases}$$

Подставим $r = Ae^{at}$ и $\varphi = \Omega t$:

$$\begin{cases} a^2 - \Omega^2 = -\varepsilon a \\ 2a\Omega = \varepsilon\omega - \varepsilon\Omega \end{cases}$$

Получили систему уравнений аналогичную первому методу.

Ответ:

$$\begin{cases} a^2 - \Omega^2 = -\varepsilon a \\ 2a\Omega = \varepsilon\omega - \varepsilon\Omega \end{cases}$$

B4 1.00

Решите полученную систему уравнений и найдите подходящие пары значений (a_1, Ω_1) и (a_2, Ω_2) , если $a_2 > a_1$. Выразите ответ через ε, ω .

Для решения преобразуем уравнения:

$$\begin{cases} \Omega^2 = \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} \\ \Omega = \frac{\varepsilon\omega}{2\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)} \end{cases}$$

Обозначим $\gamma = \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2$.

$$\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4\gamma} = \Omega^2 = \gamma - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\gamma^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}\gamma = \frac{\varepsilon^2\omega^2}{4} = \left(\gamma - \frac{\varepsilon^2}{8}\right)^2 - \frac{\varepsilon^4}{64}$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon^2}{8} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4} + \frac{\varepsilon^4}{64}}$$

Заметим, что $\gamma > 0$, поэтому подходит только корень со знаком $+$.

$$a + \frac{\varepsilon}{2} = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{8} + \sqrt{\frac{\varepsilon^2\omega^2}{4} + \frac{\varepsilon^4}{64}}}$$

$$a = \varepsilon \left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{\omega^2}{4\varepsilon^2} + \frac{1}{64}}} \right)$$

$$\Omega = \pm \frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{4\omega^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{4}}}}$$

Ответ:

$$a_1 = \varepsilon \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{\omega^2}{4\varepsilon^2} + \frac{1}{64}}} \right)$$

$$a_2 = \varepsilon \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{\omega^2}{4\varepsilon^2} + \frac{1}{64}}} \right)$$

$$\Omega_1 = -\frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{4\omega^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{4}}}}$$

$$\Omega_2 = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{4\omega^2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{4}}}}$$

B5 0.50

Найдите приближённые значения этих величин в случаях $\varepsilon \ll \omega$ и $\varepsilon \gg \omega$.

Ответ: Для $\varepsilon \ll \omega$:

$$a_1 = -\sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{2}} = \Omega_1$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon}{2}} = \Omega_2$$

Для $\varepsilon \gg \omega$:

$$a_1 = -\varepsilon$$

$$a_2 = 0$$

$$\Omega_1 = -\omega$$

$$\Omega_2 = \omega$$

B6^{1.50}

Произвольное решение системы уравнений имеет вид

$$(x(t), y(t)) = A\vec{r}_{11} + B\vec{r}_{12} + C\vec{r}_{21} + D\vec{r}_{22}.$$

Используя начальные условия, приведенные во введении к части, выразите A , B , C и D через r_0 , a_1 , a_2 , Ω_1 и Ω_2 .

Начальные условия: $x(0) = 0$, $y(0) = r_0$, $\dot{x}(0) = 0$ и $\dot{y}(0) = 0$.

$$\begin{cases} A + B = r_0 \\ C + D = 0 \\ a_1 A + a_2 B - \Omega_1 C - \Omega_2 D = 0 \\ a_1 C + a_2 D + \Omega_1 A + \Omega_2 B = 0 \end{cases}$$

$$D = -C$$

$$\begin{cases} A + B = r_0 \\ a_1 A + a_2 B = C(\Omega_1 - \Omega_2) \\ \Omega_1 A + \Omega_2 B = C(a_2 - a_1) \end{cases}$$

$$\frac{a_1 A + a_2 B}{\Omega_1 A + \Omega_2 B} = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{a_2 - a_1}$$

$$A(a_1(a_2 - a_1) + \Omega_1(\Omega_2 - \Omega_1)) = B(a_2(a_1 - a_2) + \Omega_2(\Omega_1 - \Omega_2))$$

$$r_0 = A \frac{a_2(a_1 - a_2) + \Omega_2(\Omega_1 - \Omega_2) + a_1(a_2 - a_1) + \Omega_1(\Omega_2 - \Omega_1)}{a_2(a_1 - a_2) + \Omega_2(\Omega_1 - \Omega_2)}$$

$$r_0 = A \frac{(a_2 - a_1)^2 + (\Omega_2 - \Omega_1)^2}{a_2(a_2 - a_1) + \Omega_2(\Omega_2 - \Omega_1)}$$

$$A = r_0 \frac{a_2(a_2 - a_1) + \Omega_2(\Omega_2 - \Omega_1)}{(a_2 - a_1)^2 + (\Omega_2 - \Omega_1)^2}$$

$$B = -r_0 \frac{a_1(a_2 - a_1) + \Omega_1(\Omega_2 - \Omega_1)}{(a_2 - a_1)^2 + (\Omega_2 - \Omega_1)^2}$$

$$C = \frac{a_1 A + a_2 B}{\Omega_1 - \Omega_2} = r_0 \frac{a_2 \Omega_1 - a_1 \Omega_2}{(a_2 - a_1)^2 + (\Omega_2 - \Omega_1)^2}$$

$$D = r_0 \frac{a_1 \Omega_2 - a_2 \Omega_1}{(a_2 - a_1)^2 + (\Omega_2 - \Omega_1)^2}$$

Ответ:

$$A = r_0 \frac{a_2(a_2 - a_1) + \Omega_2(\Omega_2 - \Omega_1)}{(a_2 - a_1)^2 + (\Omega_2 - \Omega_1)^2}$$

$$B = -r_0 \frac{a_1(a_2 - a_1) + \Omega_1(\Omega_2 - \Omega_1)}{(a_2 - a_1)^2 + (\Omega_2 - \Omega_1)^2}$$

$$C = r_0 \frac{a_2 \Omega_1 - a_1 \Omega_2}{(a_2 - a_1)^2 + (\Omega_2 - \Omega_1)^2}$$

$$D = r_0 \frac{a_1 \Omega_2 - a_2 \Omega_1}{(a_2 - a_1)^2 + (\Omega_2 - \Omega_1)^2}$$

B7^{0.50}

Нарисуйте качественно траекторию движения частицы в плоскости xu для случаев $\varepsilon \ll \omega$ и $\varepsilon \gg \omega$.

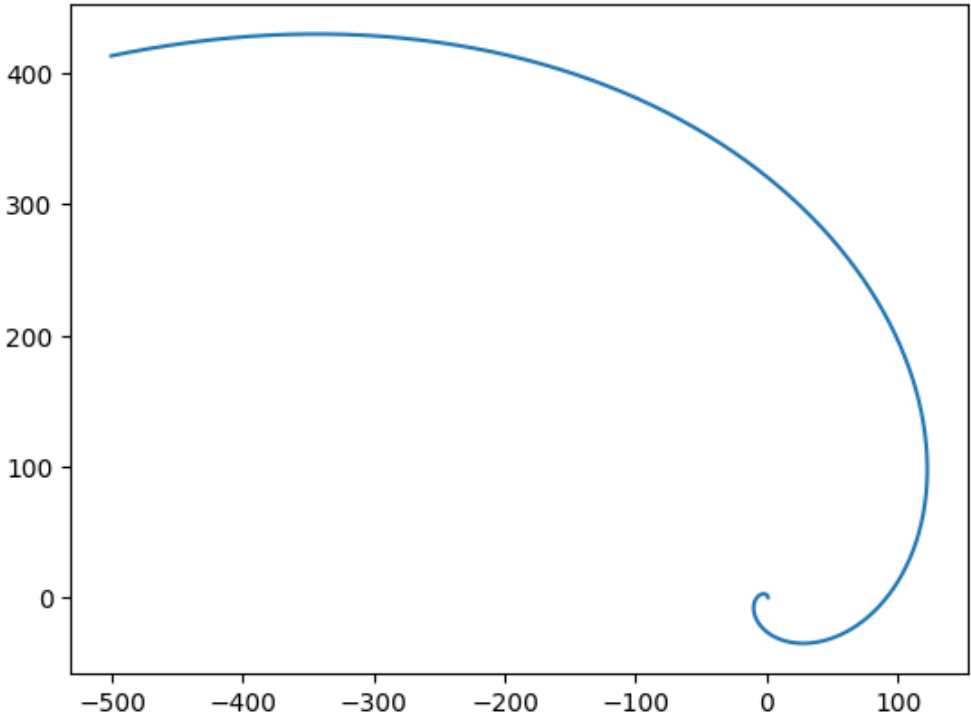
Для $\varepsilon \ll \omega$ получим:

$$x(t) = r_0 \cos \Omega_2 t \cosh \Omega_2 t$$

$$y(t) = r_0 \sin \Omega_2 t \sinh \Omega_2 t$$

При пренебрежении затухающей экспонентой получается логарифмическая спираль. Угол между радиус-вектором и скоростью через большое время после начала движения равен 45° .

Ответ:

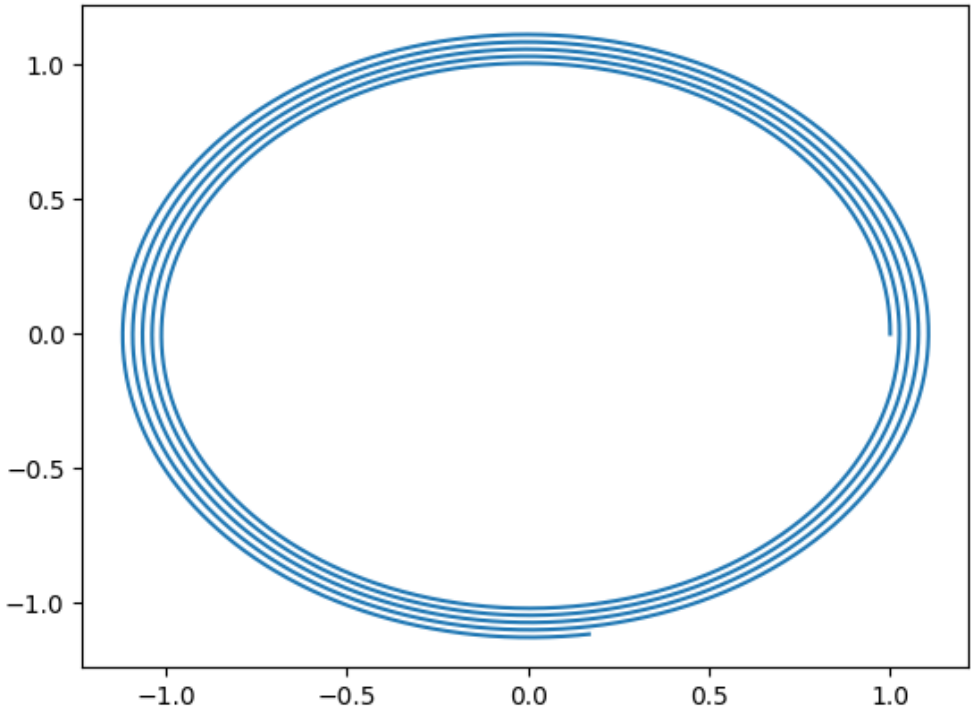


При $\varepsilon \gg \omega$ частица движется по окружности радиуса r_0 с медленно возрастающим радиусом:

$$x(t) \approx r_0 \cos \omega t$$

$$y(t) \approx r_0 \sin \omega t$$

Ответ:



В8^{1.00}

Найдите мощность потерь энергии P , которая уходит в тепло, в момент, когда частица находится в точке с координатами $\vec{r} = (x, y, z)$ и движется со скоростью $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

Запишем закон изменения энергии системы:

$$m\left(\vec{v}, \dot{\vec{v}}\right)=m\left(\vec{g}, \vec{v}\right)-P+W,$$

где W - мощность внешних сил, действующая на среду. Найдём W . Чтобы среда вращалась в постоянной угловой скоростью, на каждый её участок должна действовать сила с нулевой проекцией на направление скорости, поэтому на область, в которой находится частица, действует сила $-\vec{F}$ со стороны частицы и внешняя сила $\vec{F}$.

$$W=\left(\vec{F},\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]\right)$$

$$\left(\vec{v},m\vec{g}+\vec{F}\right)=m\left(\vec{g},\vec{v}\right)-P+\left(\vec{F},\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]\right)$$

$$P=\left(\vec{F},\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]-\vec{v}\right)=\varepsilon m v_{\text{отн}}^2=\varepsilon m\left(v_z^2+\left(v_x+\omega y\right)^2+\left(v_y-\omega x\right)^2\right)$$

Ответ:

$$P = \left(\vec{F}, [\vec{\omega}, \vec{r}] - \vec{v}\right) = \varepsilon m v_{\text{отн}}^2 = \varepsilon m \left(v_z^2 + (v_x + \omega y)^2 + (v_y - \omega x)^2\right)$$