

Road to IPhO

Гантель с вязкостью

Часть А. Гантель с закреплённой точкой (2.2 балла)

Гантель состоит из лёгкого жёсткого стержня длины l и двух точечных масс на его концах: m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$). Поле тяжести в данной части отсутствует. Гантель закреплена в некоторой своей точке на цилиндрическом шарнире так, что она может вращаться в содержащей её плоскости. Система находится в вязкой среде, так что на точечные концы гантели (и только на них) действует сила вязкого трения, которая равна

$$\vec{f}_i = -\gamma \vec{v}_i,$$

где i — номер конца, $\vec{v}_i$ — скорость в лабораторной системе отсчёта, а $\gamma > 0$.

Известно, что момент инерции J гантели относительно оси вращения минимален среди всех, которые можно получить, закрепляя гантель описанным образом.

A1 Найдите расстояние x_1 от конца гантели m_1 до точки крепления.

0.6

A2 Найдите момент инерции J .

0.2

В момент времени $t = 0$ гантель покоилась, а к тяжёлому концу m_1 приложили постоянную по модулю силу F , направление которой всегда перпендикулярно плечу гантели.

A3 Вычислите угловое ускорение ε гантели в момент времени $t = 0$.

0.3

A4 Вычислите установившуюся угловую скорость ω_{lim} вращения гантели спустя длительное время.

0.6

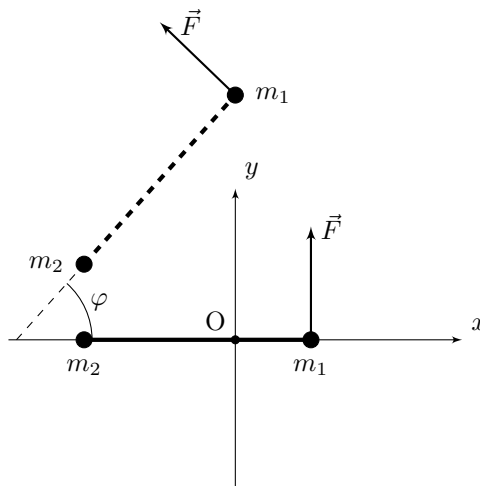
A5 Найдите момент времени τ , в который угловая скорость равна $\omega_{\text{lim}}/2$.

0.5

Часть В. Свободная гантель (1.4 балла)

В данном пункте поле тяжести и сила трения отсутствуют. Теперь гантель не закреплена.

Введём прямоугольную декартову систему координат Oxy . В момент времени $t = 0$ гантель покоилась вдоль оси Ox и к её тяжёлому концу m_1 приложили постоянную по модулю силу F , направление которой всегда перпендикулярно плечу гантели. В начальный момент сила сонаправлена с осью Oy .



Road to IPhO

B1 Вычислите угловое ускорение ε гантели в момент времени $t = 0$.

0.2

B2 Какое время T_n займёт n -ый оборот гантели?

0.2

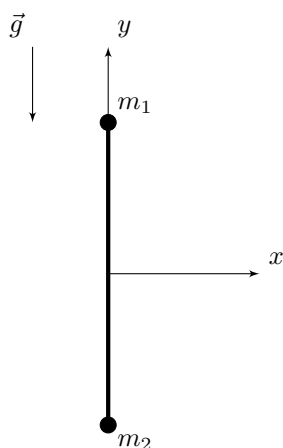
B3 Спустя длительное время скорость центра масс гантели устанавливается практически постоянной. Найдите вектор $\vec{u}$ установившейся скорости центра масс. В ответ запишите x - и y -компоненты скорости $\vec{u}$. **1.0**

Вам могут понадобиться следующие интегралы Френеля:

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \int_0^\infty \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Часть C. Релакс в вязкой среде (1.8 балла)

Теперь гантель не закреплена, находится в вязкой среде в поле тяжести, а также на неё действует постоянная сила Архимеда, точка приложения которой находится в середине гантели. Она по модулю равна силе тяжести. Изначально гантель покоится в вертикальном положении.



В этой части задачи и далее для удобства при решении и выражении ответа вы можете пользоваться следующим обозначением: за $\vec{\Delta}$ обозначим вектор, начало которого располагается в центре масс гантели, а конец — в её середине; $\Delta = |\vec{\Delta}|$.

Гантель слегка отклоняют от положения равновесия.

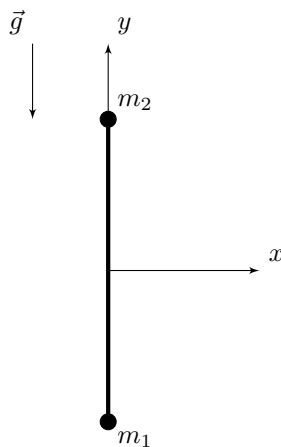
C1 Определите итоговый вектор перемещения $\vec{s}$ центра масс гантели после её остановки. Ответ должен быть представлен в виде компонент в изображённой на данном рисунке системе координат. **1.5**

C2 Определите, какое количество теплоты выделилось в процессе всего движения гантели. **0.3**

Часть D. Колебания в вязкой среде (1.9 балла)

Теперь гантель в условиях прошлого пункта находится в устойчивом вертикальном положении равновесия: тяжелый конец m_1 находится строго под лёгким m_2 .

Road to IPhO



Гантель отклоняют от вертикали на угол $\varphi_0 \ll 1$, а затем отпускают без начальной скорости. Потери энергии, вызванные вязким трением, считайте малыми.

D1 В произвольный момент времени запишите полный момент $\vec{M}_{\text{out}}$ внешних сил относительно центра масс гантели. Выразите его через скорость центра масс $\vec{v}$, угловую скорость $\vec{\omega}$, $\vec{\Delta}$, $\vec{g}$ и параметры системы. **0.6**

D2 Покажите, что при условиях малости затухания и $\varphi_0 \ll 1$ в записи уравнения вращательного движения можно пренебречь моментом, вызванным поступательным движением центра масс. **0.2**

Даже если вы не выполнили предыдущий пункт, введённое в нём приближение можно использовать дальше.

D3 Запишите уравнение вращательного движения. С учётом малости затухания и условия $\varphi_0 \ll 1$ и получите уравнение затухающих колебаний угла, образованного гантелью с вертикалью: **0.5**

$$\ddot{\varphi} + A\dot{\varphi} + B\varphi = 0.$$

Определите коэффициенты A и B .

D4 Определите период T колебаний гантели. **0.2**

D5 Оцените характерное время τ затухания колебаний гантели. **0.2**

D6 Определите добротность Q такой колебательной системы. **0.2**

Часть Е. Регулярная прецессия гантели (0.8 балла)

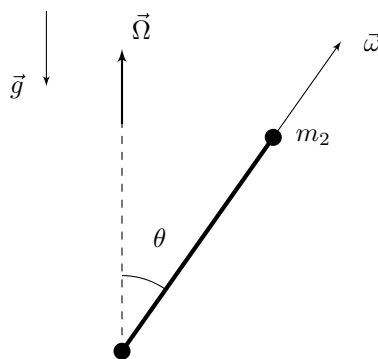
Пусть теперь стержень гантели является однородным цилиндром с радиусом R , длиной l и массой m . В данном пункте мы рассмотрим прецессию такого «волчка» под действием его собственной силы тяжести. С этого момента и до конца задачи полагайте $m_1 = m_2 = 0$.

E1 Вычислите момент инерции I стержня гантели относительно его оси. **0.1**

При решении и выражении ответов вы можете всегда пользоваться обозначением I .

Один из концов гантели закреплён на поверхности стола на сферическом шарнире без трения. Гантель вращается вокруг своей оси с очень большой угловой скоростью ω , так что далее можно считать, что полный момент импульса $\vec{L}$ гантели направлен вдоль вектора $\vec{\omega}$. Помимо силы реакции опоры на гантель также действует и сила тяжести, момент которой вызывает движение, названное гироскопическим (или же регулярной прецессией): центр масс гантели вращается вокруг вертикали, проходящей через сферический шарнир, с некоторой установившейся угловой скоростью Ω .

Road to IPhO



Пусть гантель совершает описанное вращение в однородном поле тяжести $\vec{g}$, притом угол плеча гантели с вертикалью постоянен и равен θ_0 .

E2	Запишите закон изменения момента импульса гантели относительно точки её крепления.	0.2
-----------	--	------------

E3	Вычислите угловую скорость $\vec{\Omega}$ регулярной прецессии гантели.	0.5
-----------	---	------------

Часть F. Прецессия в присутствии вязкого трения (1.9 балла)

Пусть теперь гантель совершает гироскопическое движение в присутствии вязкого трения. С одной стороны, на неопирающийся конец гантели m_2 действует сила вязкого трения, связанная с его прецессионным движением вокруг вертикали. С другой стороны, существует момент сил вязкого трения, вызванный вращением гантели вокруг собственной оси симметрии. Он равен $\vec{M}_{\text{fric}} = -\alpha\vec{\omega}$, $\alpha > 0$. Далее считайте всегда верными следующие приближения: $\omega \gg \Omega$ и $\dot{\theta} \ll \frac{mg}{\gamma l}$.

F1	Вычислите зависимость модуля момента импульса гантели от времени.	0.3
-----------	---	------------

F2	Получите дифференциальное уравнение, описывающее изменение угла гантели с вертикалью с течением времени.	0.6
-----------	--	------------

F3	Пусть начальный угол равен θ_0 . Чему равна скорость изменения угла в начальный момент?	0.2
-----------	--	------------

F4	С начальным условием из предыдущего пункта получите явную зависимость $\theta(t)$.	0.8
-----------	---	------------