



С лёгким паром!

[Задачи](#)



[Корзина недоступна](#)

Чтобы пользоваться корзиной для создания наборов задач, [авторизуйтесь](#).

[Авторизация](#)

Данная задача посвящена испарению капель за счёт диффузии и связанным с этим эффектам.

Диффузией называется процесс пространственного перераспределения компонент смеси (в частности газовой) друг относительно друга, обусловленный случайным (тепловым) движением молекул. Тогда в каждой точке поток вещества $\vec{j}_i$ (количество частиц типа i , проходящее через единицу площади в единицу времени) описывается *законом Фика* (получен Адольфом Фиком в 1855 году):

$$\vec{j}_i = -D \operatorname{grad} n_i = -D \left(\frac{\partial n_i}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial n_i}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial n_i}{\partial z} \vec{e}_z \right),$$

где D — коэффициент диффузии, **одинаковый** для всех типов частиц смеси, $n_i(\vec{r})$ — концентрация частиц типа i . Однако коэффициент диффузии может зависеть от разных параметров: давления, температуры и т. п.

Далее в задаче будет рассматриваться только двухкомпонентная смесь воздуха и водяного пара. Под воздухом подразумевается совокупность молекул различных газов (азот, кислород и т. п.), не включающая в себя молекулы воды.

Везде в задаче можно использовать следующие величины:

- Масса молекулы воды $m_w = 3.0 \cdot 10^{-26}$ кг
- Средняя масса молекулы воздуха $m_a = 4.8 \cdot 10^{-26}$ кг
- Молярная масса воды $\mu_w = 18$ г/моль
- Плотность воды $\rho_w = 1000$ кг/м³
- Удельная по массе теплота испарения воды $L = 2.26$ МДж/кг
- Постоянная Больцмана $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
- Универсальная газовая постоянная $R = 8.31$ Дж/(моль · К)
- Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

Примечания

1. Относительной влажностью воздуха η называется отношение концентрации водяного пара в воздухе к концентрации насыщенного водяного пара над плоской поверхностью при той же температуре.
2. Не учитывайте изменение давления насыщенного пара, связанное с кривизной поверхности капли, пока этого не требуется явно.
3. Считайте, что вблизи поверхности капли пар всегда насыщен.

Часть А. Стефановское течение (3.7 балла)

Рассмотрим неподвижную сферическую каплю воды, находящуюся в воздухе. Начальный радиус капли r_0 . Относительная влажность воздуха вдали от капли η , температура воздуха и капли во всех точках одинакова и равны T_0 , концентрация насыщенного пара при этой температуре равна n_0 .

Пусть $\vec{r}$ — радиус-вектор из центра капли к некоторой точке пространства, $|\vec{r}| = r$. Рассмотрим установившийся режим, так что диффузионный поток пара в силу сферической симметрии равен $\vec{j}(\vec{r}) = j(r)\vec{e}_r$, где $\vec{e}_r = \vec{r}/r$. В данной части коэффициент диффузии считается постоянным и равным D . Для начала будем считать, что концентрация воздуха одинакова во всём пространстве, так что диффузии воздуха нет.

A1 ^{0.20} Используя закон сохранения массы, выразите $j(r)$ через $j(r_0)$, r_0 , r .

A2 ^{0.30} Найдите зависимость $n(r)$ концентрации пара от расстояния до центра капли. Ответ выразите через n_0 , η , r_0 , r .

A3 ^{0.30} Найдите начальную скорость изменения массы капли I_1 . Ответ выразите через D , n_0 , η , r_0 , m_w .

Здесь и далее скоростью изменения массы капли называется $I = -\frac{dm}{dt}$, где m — масса капли.

A4 ^{0.30} Найдите время полного испарения капли. Считайте, что капля испаряется достаточно медленно, так что в каждый момент времени поток можно считать установившимся. Ответ выразите через D , n_0 , η , r_0 , ρ_w , m_w .

A5 ^{0.30} Рассчитайте время испарения капли радиусом $r_0 = 0.5$ мм.

Температура $T_0 = 293$ К, коэффициент диффузии $D = 0.25 \text{ см}^2/\text{с}$, давление насыщенного пара при этой температуре $p_0 = 2.34$ кПа, влажность воздуха вдали от капли $\eta = 0.5$.

В силу малой скорости протекания процессов в условиях задачи вязкостью и инертностью газа можно пренебречь. Тогда условием механического равновесия среды является равенство давлений во всём пространстве, что невозможно при постоянной концентрации воздуха в среде. Обозначим концентрацию воздуха на расстоянии r от центра капли $N(r)$.

A6 ^{0.20} Выразите производную $N'(r)$ через $n'(r)$.

Здесь и далее $n'(r) = \frac{dn(r)}{dr}$, $N'(r) = \frac{dN(r)}{dr}$.

Наличие градиента $N(r)$ приводит к наличию диффузионного потока воздуха. Однако капля не поглощает воздух, поэтому помимо диффузии в описанной системе обязано быть гидродинамическое течение (течение смеси воздуха и пара как целого), компенсирующее поток воздуха к капле. На наличие такого течения впервые обратил внимание в XIX веке австрийско-словенский физик и математик Йозеф Стефан, поэтому такое течение называется стефановским.

Пусть скорость течения на расстоянии r от центра капли равна $v(r)\vec{e}_r$. Влажность воздуха вдали от капли η . Обозначим суммарную концентрацию смеси воздуха и пара вдали от капли n_s .

A7 ^{0.50} Выразите $v(r)$ через D , $N(r)$, $N'(r)$, r .

A8 ^{0.50} Выразите полный (с учётом диффузии и гидродинамического течения) поток пара от капли $j_{\text{sum}}(r)$ через D , $n(r)$, $n'(r)$, n_s , r .

A9 ^{0.50} Найдите зависимость $n(r)$ концентрации пара от расстояния до центра капли. Ответ выразите через n_0 , n_s , η , r_0 , r .

A10 ^{0.30} Найдите начальную скорость изменения массы капли I_2 . Ответ выразите через D , n_0 , n_s , η , r_0 , m_w .

A11 ^{0.30} Вычислите значение $\frac{I_2 - I_1}{I_1}$, где I_1 , I_2 — величины из пунктов **A3**, **A10**. Температура среды $T_0 = 293$ К, суммарное давление воздуха и водяного пара $P = 101.3$ кПа, остальные необходимые численные величины возьмите из пункта **A5**.

Интересно отметить, что стефановское течение можно наблюдать непосредственно, так как благодаря ему мелкие аэрозольные частицы отталкиваются испаряющимися и притягиваются растущими каплями.

В дальнейшем не учитывайте стефановское течение!

Часть В. Охлаждение капель при испарении (3.5 балла)

Как известно, жидкости охлаждаются, когда испаряются. В данной части мы рассмотрим понижение температуры капли при испарении.

Снова рассмотрим каплю начального радиуса r_0 , находящуюся в воздухе, влажность которого вдали от капли равна η . Если температура среды неоднородно в пространстве, то возникает поток тепла, вызванный теплопроводностью. Связь потока тепла $\vec{q}$ (количество тепла, проходящее через единицу площади в единицу времени) и распределения температуры определяется *законом Фурье* (получен и опубликован Жозефом Фурье в начале XIX):

$$\vec{q} = -\kappa \text{grad } T,$$

где κ — коэффициент теплопроводности, $T(\vec{r})$ — распределение температуры в пространстве. В рамках задачи коэффициент теплопроводности смеси воздуха и пара можно считать независимым от температуры.

Пусть установившаяся температура капли равна T_0 , температура воздуха вдали от капли T_∞ . Зависимость давления насыщенных паров воды от температуры приближённо задаётся формулой (получена Рудольфом Клаузиусом и Бенуа Клапейроном в XIX веке):

$$p(T) = p(T_\infty) \exp\left(\frac{\mu_w L}{R} \left(\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T}\right)\right).$$

B1 ^{0.30} Найдите установившееся распределение температуры в пространстве $T(r)$ в зависимости от расстояния r до центра капли. Ответ выразите через T_0 , T_∞ , r_0 , r .

B2 ^{0.20} Определите мощность J , подводимую к капле в начальный момент времени за счёт теплопроводности воздуха. Ответ выразите через κ , T_0 , T_∞ , r_0 .

Если температура капли T_0 значительно отличается от T_∞ , то пренебрегать зависимостью коэффициента диффузии D от температуры нельзя. Пусть коэффициент диффузии зависит от температуры по формуле:

$$D(T) = D_{\infty} \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)^{\alpha},$$

Где D_{∞} — константа, $\alpha > 1$.

В3 1.50 Определите начальную скорость изменения массы капли. Ответ выразите $T_0, T_{\infty}, D_{\infty}, m_w, k_B, p(T_0), p(T_{\infty}), r_0, \eta, \alpha$.

Примечание. В интегралах вида

$$\int f \left(\frac{1}{x} \right) \frac{dx}{x^2}$$

может быть полезна замена переменной $y = 1/x$.

В4 0.30 Из условия теплового баланса капли получите уравнение, связывающее $T_0, T_{\infty}, \kappa, D_{\infty}, L, m_w, k_B, p(T_0), p(T_{\infty}), r_0, \eta, \alpha$.

В5 1.20

Рассчитайте температуру капли T_0 с точностью до десятых долей кельвина. Используйте следующие численные значения:

- $T_{\infty} = 293.0 \text{ K}$
- $p(T_{\infty}) = 2.34 \text{ кПа}$
- $\kappa = 26.0 \text{ мВт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
- $D_{\infty} = 0.25 \text{ см}^2/\text{с}$
- $r_0 = 0.5 \text{ мм}$
- $\eta = 0.5$
- $\alpha = 1.8$ (хорошее приближение для водяного пара)

В дальнейшем не учитывайте температурные эффекты! Считайте, что температура во всех точках пространства одинакова.

Часть С. Учёт кривизны поверхности (0.8 балла)

Как известно, давление насыщенного пара над искривленной поверхностью отличается от давления над плоской поверхностью. Приближённо зависимость давления от радиуса кривизны r описывается формулой (получена лордом Кельвином в 1871 году):

$$p_r \approx p_{\infty} \left(1 + \frac{r_{\sigma}}{r} \right),$$

где p_{∞} — давление насыщенных паров над плоской поверхностью ($r \rightarrow \infty$), r_{σ} — константа.

Наличие этого эффекта приводит к испарению капель, находящихся даже в воздухе с влажностью $\eta = 1$. Этот эффект оказывается значительным, например, при описании физики тумана.

Рассмотрим каплю радиусом r_0 , находящуюся в насыщенном воздухе (влажность воздуха вдали от капли $\eta = 1$). Температура всей системы T_0 , концентрация насыщенного пара **над плоской поверхностью** при этой температуре n_0 . Коэффициент диффузии D .

С1 0.50 Найдите время полного испарения капли. Ответ выразите через $r_0, \rho_w, D, n_0, r_{\sigma}$.

C2 0.30 Рассчитайте время испарения капли тумана радиусом $r_0 = 10^{-5}$ м. Температура $T_0 = 293$ К, давление насыщенного пара при этой температуре $p_0 = 2.34$ кПа, коэффициент диффузии $D = 0.25$ см²/с, $r_\sigma = 1.08 \cdot 10^{-9}$ м.

Далее не учитывайте зависимость давления насыщенного пара от кривизны поверхности!

Часть D. Электростатическая аналогия (2.0 балла)

Оказывается, что к задачам стационарной диффузии применимы методы электростатики. Для этого достаточно провести аналогию между потенциалом и концентрацией пара.

Вне капли выполняется уравнение:

$$\vec{j} = -D \operatorname{grad} n.$$

В то же время для электрического поля выполняется:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Таким образом, можно формально сопоставить потоку $\vec{j}$ — напряжённость $\vec{E}$, а концентрации $n(\vec{r})$ — потенциал $\varphi(\vec{r})$. Тогда поверхность жидкости эквивалента поверхности проводника с заданным потенциалом, определяемым концентрацией насыщенного пара вблизи капли. При этом потенциал $\varphi(\vec{r})$ прямо пропорционален концентрации $n(\vec{r})$.

Рассмотрим две системы:

1. уединённый проводник с зарядом q и распределением потенциала в пространстве $\varphi(\vec{r})$;
2. испаряющаяся капля такой же формы, что и проводник, с распределением концентрации пара $n(\vec{r}) = \gamma \varphi(\vec{r})$, γ — некоторый коэффициент.

Тогда согласно уравнениям если распределение поля в электрической системе $\vec{E}(\vec{r})$, то распределение потока в диффузионной системе $\vec{j}(\vec{r}) = \gamma D \vec{E}(\vec{r})$.

D1 0.40 Покажите, что скорость изменения массы I капли в таком случае пропорциональна заряду проводника q в эквивалентной электрической системе. Определите отношение I/q . Ответ выразите через ε_0 , γ , D , m_w .

D2 0.60 Найдите скорость изменения массы капли произвольной формы, если проводник такой же формы имеет электрическую ёмкость C . Капля имеет температуру T_0 , концентрация насыщенного пара при этой температуре равна n_0 , вдали от капли относительная влажность воздуха η . Также в ответе используйте m_w , D , ε_0 .

Используя электростатическую аналогию, можно оценить влияние испарения разных капель друг на друга.

Рассмотрим неподвижную сферическую каплю радиусом r_1 . Влажность воздуха вдали от капли η , температура всей системы T_0 , концентрация насыщенного пара при этой температуре равна n_0 . Обозначим начальную скорость изменения массы капли в этом случае I .

Пусть теперь в систему вносят вторую каплю радиусом r_2 . Она располагается неподвижно на расстоянии $l \gg r_1, r_2$ от первой капли. В этом случае начальная скорость изменения массы первой капли равна I' .

D3 1.00 Найдите $\frac{I' - I}{I}$. Ответ выразите через r_1, r_2, l .

Т,Термодинамика,Электрос

2020 — Мы те, кого должны превзойти.

[Website in English](#)

