

Трансформаторы

Трансформатор – это электромагнитное устройство, имеющее две или более индуктивно связанные обмотки. Он предназначен для преобразования системы переменного тока с одними параметрами в систему переменного тока с другими параметрами. Чаще всего трансформируются напряжение и ток, при этом частота сигнала не изменяется.

Во всех пунктах задачи вы можете использовать μ_0 для выражения формульных ответов там, где это необходимо. Для вычислений используйте $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Единичные векторы вдоль направлений обозначаются буквой с $\wedge$. К примеру, единичный вектор вдоль оси x обозначается $\hat{x}$. Все численные ответы приводите в единицах СИ.

Часть А. Однофазный трансформатор (3.6 балла)

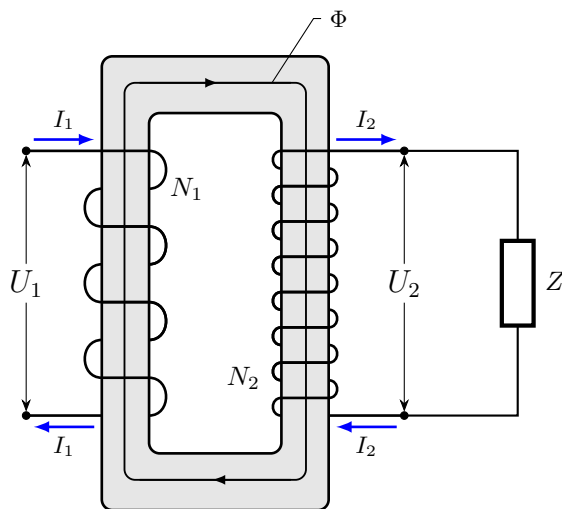
Простейший трансформатор состоит из ферромагнитного сердечника и намотанных на него двух обмоток с количеством витков N_1 и N_2 . Омическим сопротивлением обмоток всюду, кроме части С, можно пренебречь. Магнитная проницаемость сердечника $\mu \gg 1$, благодаря чему между обмотками трансформатора обеспечивается полная магнитная связь – то есть можно считать, что поток магнитного поля Φ внутри сердечника не рассеивается.

Примечания

- За положительное направление магнитного потока в обмотке примите направление потока, которое создавал бы ток, текущий в этой обмотке по указанным на рисунке направлениям тока.
- За положительное направление магнитного потока через сечение сердечника примите направление потока, обозначенное на рисунке буквой Φ .
- Положительное направление тока указано на рисунке.
- Напряжение на обмотках равно разности потенциала верхней точки и потенциала нижней точки на рисунке.
- Коэффициент взаимной индукции обмоток i и j определяется как

$$M = \frac{\partial \Phi_j}{\partial I_i},$$

где Φ_j – поток через обмотку j , а I_i – ток в обмотке i .



В пунктах **A1–A3** найдём индуктивности обмоток L_1 , L_2 и их коэффициент взаимной индукции M .

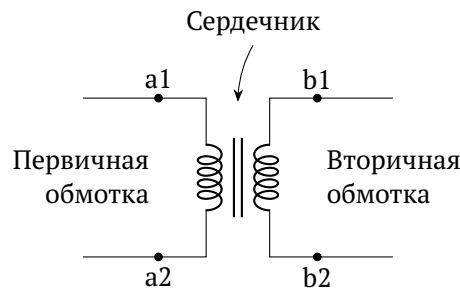
A1 Чему равны потоки магнитного поля через первичную и вторичную обмотки Φ_1 и Φ_2 ? Ответы выразите через Φ , N_1 и N_2 . **0.2**

Для упрощения вычислений считайте, что площадь сечения сердечника S постоянна. Длина сердечника равна $\ell \gg \sqrt{S}$.

A2 С помощью теоремы о циркуляции для вектора напряжённости магнитного поля $\vec{H}$ найдите поток магнитного поля Φ в сердечнике. Ответ выразите через S , ℓ , μ , I_1 , I_2 , N_1 и N_2 . **0.2**

A3 Получите выражения для индуктивностей обмоток L_1 , L_2 и их коэффициента взаимной индукции M . Ответ выразите через S , ℓ , μ , I_1 , I_2 , N_1 и N_2 . **0.3**

Взаимодействие двух обмоток полностью описывается найденными величинами L_1 , L_2 и M . На схемах трансформатор изображается следующим образом:



A4 Найдите ЭДС магнитной индукции $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, возникающие в первичной и вторичной обмотках соответственно. Ответ выразите через $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, L_1 , L_2 и M . **0.4**

Примечания:

- ЭДС $\mathcal{E}_1$ считается положительной, если электростатический потенциал в верхней точке a1 больше, чем в нижней a2.
- ЭДС $\mathcal{E}_2$ считается положительной, если электростатический потенциал в верхней точке b1 больше, чем в нижней b2.

На первичную обмотку подали синусоидальное напряжение $U_1(t) = \text{Re} [\tilde{U}_1 e^{-i\omega t}]$ с амплитудой $U_0 = |\tilde{U}_1|$. Все величины в системе также будут меняться синусоидально, а значит можно ввести соответствующие комплексные амплитуды:

$$I_1(t) = \text{Re} [\tilde{I}_1 e^{-i\omega t}], \quad I_2(t) = \text{Re} [\tilde{I}_2 e^{-i\omega t}], \quad U_2(t) = \text{Re} [\tilde{U}_2 e^{-i\omega t}].$$

Пусть ко вторичной обмотке подключена цепь с импедансом Z . Для записи ответов вы можете явно использовать вещественную и мнимую части Z : $\text{Re } Z$ и $\text{Im } Z$ соответственно.

A5 Получите выражение для коэффициента трансформации тока $k_I \equiv |\tilde{I}_1|/|\tilde{I}_2|$. В ответ могут входить L_1 , L_2 , ω и Z . **0.5**

A6 Чему равен коэффициент трансформации напряжения $k_U = |\tilde{U}_2|/|\tilde{U}_1|$? В ответ могут входить L_1 , L_2 , ω и Z . **0.5**

Основное приложение трансформаторов – понижение амплитуды тока (и, соответственно, повышение амплитуды напряжения) перед тем, как подавать его на линию электропередачи. Это необходимо для того, чтобы снизить омические потери в проводах. Для таких трансформаторов, называемых силовыми:

$$k_I, k_U \gg 1 \quad (1)$$

A7 Запишите условие на количество витков в обмотках N_1 и N_2 , при котором выражение (1) выполняется. **0.3**

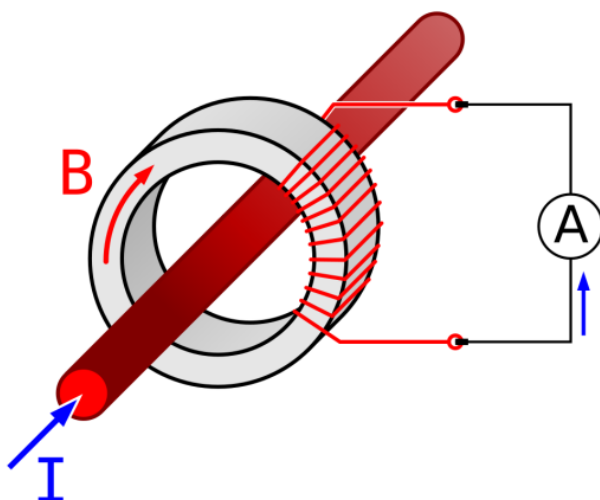
Из-за наличия взаимной индукции, источник напряжения U_1 может совершать работу, несмотря на отсутствие активного сопротивления, подключенного непосредственно к нему.

A8 Определите разность фаз $\Delta\varphi$, на которую напряжение U_1 опережает ток I_1 . В ответ могут входить L_1 , L_2 , ω и Z . **0.6**

A9 Определите усредненную по времени мощность P источника U_1 . В ответ могут входить U_0 , Z , N_1 и N_2 . **0.6**

Часть В. Измерительный трансформатор тока (0.5 балла)

Если вы хоть раз делали эксперимент с электричеством, вы должны знать, как легко может перегореть амперметр при больших токах! Для предотвращения таких казусов применяют измерительный трансформатор тока, который занижает ток в фиксированное количество раз. Первичной обмоткой трансформатора является проводник с измеряемым переменным током I , а во вторичной обмотке с количеством витков N подключается амперметр. Внутреннее сопротивление амперметра очень мало, поэтому фактически вторичная обмотка трансформатора работает в режиме, близком к короткому замыканию. Магнитная проницаемость сердечника – $\mu \gg 1$, его радиус – R и много больше толщины провода.



B1 Найдите отношение I/I_A . **0.5**

Потери энергии в трансформаторах

Для использования трансформаторов в промышленных целях необходимо уметь определять и минимизировать потери энергии в них. Энергия в трансформаторах теряется в основном за счет следующих факторов:

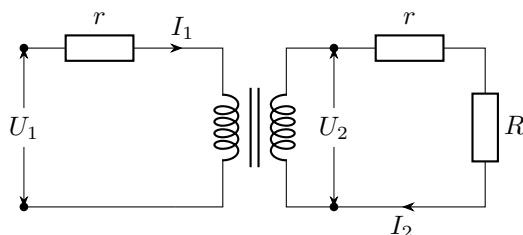
1. Джоулевы потери в обмотках
2. Джоулевы потери в толще сердечника из-за индуцированных вихревых токов
3. Перемагничивание (ферромагнитный гистерезис)

В следующих частях будет изучено влияние каждого из факторов, считая эти факторы **независимыми и малыми**, а также будет рассчитан КПД трансформатора. Будем для простоты считать, что число витков в первичной и вторичной обмотках **одинаково**. Для численных расчётов используйте следующие значения:

- Длина сердечника $\ell = 25$ см
- Площадь поперечного сечения сердечника $S = 100$ см², его радиус можно считать постоянным
- Индукция насыщения материала сердечника $B_s = 1.5$ Тл
- Коэрцитивная сила материала сердечника $H_c = 20$ А/м
- Магнитная проницаемость материала сердечника $\mu = 1000$
- Число витков в каждой из обмоток трансформатора $N = 100$
- Диаметр проволоки $d = 0.6$ мм
- Проводимость меди $\sigma_w = 5.8 \cdot 10^7$ Ом⁻¹ · м⁻¹
- Проводимость материала сердечника $\sigma_c = 30 \cdot 10^3$ Ом⁻¹ · м⁻¹
- Частота подаваемого напряжения $f = 50$ Гц
- Толщина пластин магнитопровода $h = 0.4$ мм
- Сопротивление питаемой нагрузки $R = 160$ Ом
- Действующее (среднеквадратичное) напряжение источника $U_{\text{rms}} = 220$ В

Часть С. Омические потери в обмотках (2 балла)

Будем моделировать сопротивление обмоток, добавив в первичную и вторичную обмотки малое сопротивление r (см. рис. ниже).



С1 Получите выражение для средней мощности P_0 , которая выделяется на нагрузке, если сопротивлением обмоток можно пренебречь. Ответ выразите через амплитуду входного напряжения U_0 и сопротивление нагрузки R . Вычислите её для трансформатора, параметры которого даны в задаче ранее. **0.2**

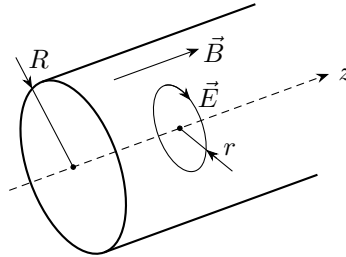
С2 По аналогии с частью **А** запишите уравнения, связывающие комплексные амплитуды $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{I}_1$ и $\tilde{I}_2$. В ответ также могут входить R, r , индуктивность одной обмотки L и циклическая частота ω . **0.3**

С3 Выразите $\tilde{I}_1$ и $\tilde{I}_2$ через $\tilde{U}_1$ и другие необходимые вам величины, в которые могут входить R, r, L и ω . **0.4**

С4 Здесь и далее работайте в пределе $r \ll R, \omega L$. Получите выражения для мощности Джоулевых потерь P_{r1} и P_{r2} , выделяющихся в первичной и вторичной обмотках. Ответ выразите через амплитуду входного напряжения U_0 , а также r, ω и L . Вычислите суммарную мощность Джоулевых потерь на обмотках $P_r = P_{r1} + P_{r2}$ для трансформатора, параметры которого даны ранее в задаче. Приведите в листах решений подробные выкладки для ваших расчётов. **1.1**

Часть D. Токи Фуко (2.7 балла)

Если в проводящем материале создать переменное магнитное поле, в нём возникает вихревое электрическое поле и связанные с ним **токи Фуко**. Это приводит к дополнительным потерям энергии. Рассмотрим длинный цилиндрический сердечник с сечением S и длиной ℓ (будем считать, что $\ell \gg \sqrt{S}$). Магнитное поле $\vec{B}(t) = \text{Re} [B_0 \hat{z} e^{-i\omega t}]$ пронизывает этот сердечник по его оси z . Влиянием токов Фуко на распределение магнитного поля пренебрегите.



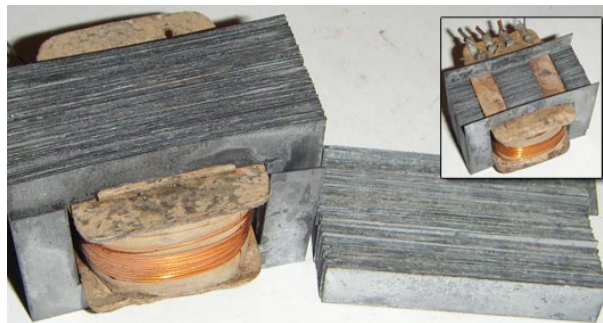
D1 Запишите выражение для тангенциального электрического поля $E(r, t)$.

0.3

D2 Получите выражение для средней мощности Джоулевых потерь P_{eddy} , выделяющихся в сердечнике. Выразите ответ через проводимость материала сердечника σ_c , площадь его поперечного сечения S , длину ℓ , а также B_0 и f .

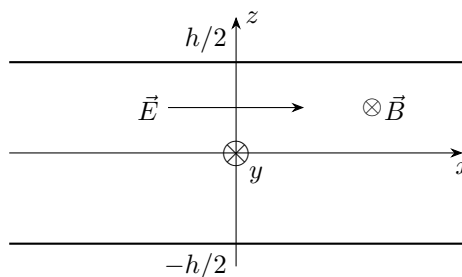
0.7

Чтобы уменьшить потери, сердечник делают **слоистым вдоль его оси** – между слоями ферромагнетика прокладывают тонкие прослойки непроводящего материала. В этом случае токи Фуко могут возбуждаться лишь отдельно в каждой пластинке.



Однофазный трансформатор. Его сердечник собран из изолированных друг от друга пластин для уменьшения потерь от токов Фуко

Рассмотрим такую пластинку толщиной h во внешнем поле $\vec{B}(t) = \text{Re} [B_0 \hat{y} e^{-i\omega t}]$, направленном **параллельно ей**.



Несложно показать, что в такой системе возбуждаемое электрическое поле также параллельно пластинке и перпендикулярно магнитному полю. Будем искать его в виде:

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re} [A z \hat{x} e^{-i\omega t}].$$

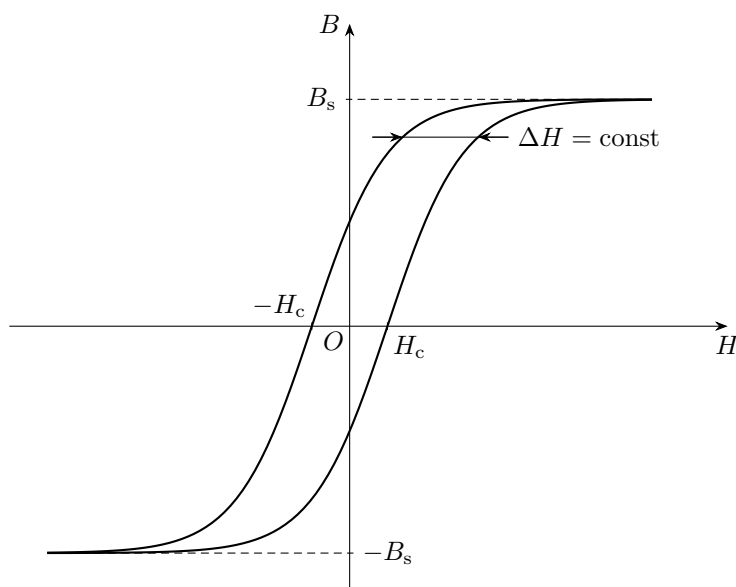
D3 Найдите множитель A .

0.3

D4 Запишите выражение для мощности dP/dV , выделяющейся в такой пластинке в расчёте на единицу объёма, усреднённой по всей высоте пластинки, а также по времени. В ответ могут входить S , ℓ , B_0 , h , σ_c и f . Пусть теперь сердечник собран из пластин с параметрами, указанными выше в задаче. Ко вторичной обмотке всё ещё подключена нагрузка R . Выразите мощность P'_{eddy} , которая выделялась бы в сердечнике вследствие токов Фуко, через параметры, данные в задаче. Вычислите эту мощность. **1.4**

Часть Е. Гистерезис (1.2 балла)

Наконец, рассмотрим влияние гистерезиса. Будем считать, что под воздействием напряжённости магнитного поля, создаваемого током в обмотках, индукция магнитного поля внутри сердечника описывает кривую намагничивания, показанную на рисунке ниже. Ширина этой кривой по H постоянна, магнитное поле варьируется в диапазоне от $-B_s$ до $+B_s$ (т.н. **индукция насыщения**) и обнуляется при $\pm H_c$ (т.н. **коэрцитивная сила**).



E1 Рассмотрим для простоты трансформатор без нагрузки. Запишите энергию, которую источник передаёт сердечнику, когда через первичную обмотку течёт ток I , а поток через сердечник меняется на $d\Phi$. Затем выразите эту энергию через H , dB и параметры сердечника. **0.4**

E2 Будем считать, что последнее выражение справедливо в произвольном случае. Запишите выражение для средней мощности P_{hyst} гистерезисных потерь. Ответ выразите через H_c , B_s и величины, данные в начале части С. Также получите численное значение. **0.3**

E3 Считая все вклады, посчитанные в частях С, D и Е, малыми и независимыми, вычислите итоговый КПД трансформатора η . **0.5**