

A1 ^{0.60} Найдите расстояние x_1 от конца гантели m_1 до точки крепления.

При фиксированной ориентации оси вращения относительно гантели для минимизации момента инерции можно использовать теорему Гюйгенса-Штейнера: для оси вращения, проходящей через произвольную точку P , момент инерции J_P связан с моментом инерции J_O , где O — центр масс системы, как

$$J_P = J_O + M \cdot OP^2.$$

Таким образом, в случае минимального J_P верно $P = O$.
Для вычисления расстояния от края m_2 используем определение центра масс:

Ответ:

$$x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l.$$

A2 ^{0.20} Найдите момент инерции J .

Найдём расстояние x_1 от тяжелого конца гантели до её центра масс:

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l.$$

Воспользуемся определением момента инерции:

Ответ:

$$J_O = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

Далее для удобства введём приведённую массу $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Тогда

$$J_O = \mu l^2.$$

A3 ^{0.30} Вычислите угловое ускорение ε гантели в момент времени $t = 0$.

В случае неподвижной оси вращения можно записать уравнение вращательного движения в виде

$$J \vec{\varepsilon} = \sum_i \vec{M}_i.$$

В случае плоского движения направления момента сил и углового ускорения очевидны, так что далее перепишем уравнение в скалярном виде.

Согласно условию, внешний вынуждающий момент постоянен и равен $M_{\text{outer}} = F \cdot x_1$, а при нулевой угловой скорости сила трения отсутствует. Подставляя выражение для x_1 , имеем

Ответ:

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{F l}{\mu l^2} = \frac{F}{m_1 l}.$$

A4 ^{0.60} Вычислите установившуюся угловую скорость ω_{lim} вращения гантели спустя длительное время.

Момент силы трения M_{fric} возникает из-за линейных скоростей v_1, v_2 двух точечных концов стержня:

$$v_1 = \omega x_1; \quad v_2 = \omega x_2 \Rightarrow f_1 = -\gamma \omega x_1; \quad f_2 = -\gamma \omega x_2.$$

Очевидно, что момент направлен против вынуждающего постоянного момента. Запишем его:

$$M_{\text{fric}} = f_1 x_1 + f_2 x_2 = -\gamma (x_1^2 + x_2^2) \omega.$$

Теперь мы можем записать уравнение вращательного движения в произвольный момент времени:

$$\mu l^2 \varepsilon = \mu l^2 \frac{d\omega}{dt} = F x_1 - \gamma (x_1^2 + x_2^2) \omega \Leftrightarrow \mu l^2 \frac{d\omega}{dt} + \gamma (x_1^2 + x_2^2) \omega = F x_1.$$

Решение этого уравнения даётся следующей формулой:

$$\omega(t) = \frac{F x_1}{\gamma (x_1^2 + x_2^2)} \left(1 - e^{-\frac{\gamma (x_1^2 + x_2^2)}{\mu l^2} t} \right) = \frac{F}{\gamma} \frac{m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1^2 + m_2^2) l} \left(1 - e^{-\frac{\gamma (m_1^2 + m_2^2)}{(m_1 + m_2) m_1 m_2} t} \right).$$

Далее найдём ω_{lim} как предел $\omega(t)$ при $t \rightarrow \infty$, либо из дифференциального уравнения с условием $\dot{\omega} = 0$.

Ответ:

$$\omega_{\text{lim}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1^2 + m_2^2} \frac{F}{\gamma l}.$$

A5 0.50

Найдите момент времени τ , в который угловая скорость равна $\omega_{\text{lim}}/2$.

Согласно явной формуле $\omega(t)$, полученной при решении предыдущего пункта, мы имеем ответ для характерного времени τ (того времени, за которое экспонента значительно изменит своё значение).

Ответ:

$$\tau = \frac{(m_1 + m_2) \cdot m_1 m_2}{\gamma(m_1^2 + m_2^2)} \ln(2).$$

B1 0.20

Вычислите угловое ускорение ε гантели в момент времени $t = 0$.

Уравнение вращательного движения системы с массой m для оси, движущейся поступательно, выглядит как

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\text{outer}} + m[\vec{v}_c, \vec{v}_P],$$

где $\vec{v}_P$ — (поступательная) скорость оси, а $\vec{v}_c$ — скорость центра масс. Таким образом, для движущейся оси, совпадающей с центром масс, уравнение движения так же принимает вид

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\text{outer}},$$

а ответ для углового ускорения предыдущей части задачи остаётся справедливым.

Ответ:

$$\varepsilon = \frac{F}{m_1 l}.$$

B2 0.20

Какое время T_n займёт n -ый оборот гантели?

В этой части задачи трение отсутствует, так что внешний момент всегда равен вынуждающему, поэтому он постоянен. Вращение гантели происходит равноускоренно из положения с нулевой начальной угловой скоростью. Зависимость $\omega(t)$ даётся равенством

$$\omega(t) = \varepsilon t,$$

а угол поворота от начального положения, естественно,

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Гантель совершит n полных оборотов за время t_n такое, что

$$2\pi n = \frac{\varepsilon t_n^2}{2} \Rightarrow t_n = 2\sqrt{\frac{\pi n}{\varepsilon}}.$$

Ясно тогда, что время n -ого оборота может быть получено равенством

$$T_n = t_n - t_{n-1}.$$

Ответ:

$$T_n = 2\sqrt{\frac{\pi m_1 l}{F}} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 2\sqrt{\frac{\pi m_1 l}{F}} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{m_1 l}{F}.$$

B3 1.00

Спустя длительное время скорость центра масс гантели устанавливается практически постоянной. Найдите вектор $\vec{u}$ установившейся скорости центра масс. В ответ запишите x - и y -компоненты скорости $\vec{u}$.

Ясно, что

$$u_x = \int_0^\infty \dot{v}_x dt = \frac{F}{m} \int_0^\infty -\sin\left(\frac{\varepsilon t^2}{2}\right) dt = -\frac{F}{m} \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \int_0^\infty \sin(\xi^2) d\xi = -\frac{F}{m} \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

То есть

$$u_x = -\frac{F}{2m} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}.$$

Аналогично,

$$u_y = \frac{F}{2m} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}.$$

Ответ:

$$\vec{u} = \frac{\sqrt{\pi m_1 F l}}{2(m_1 + m_2)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

C1^{1.50} Определите итоговый вектор перемещения $\vec{s}$ центра масс гантели после её остановки. Ответ должен быть представлен в виде компонент в изображённой на данном рисунке системе координат.

Начнём отсчёт угла отклонения φ от вертикали в сторону минимального возмущения гантели. Запишем теорему о движении центра масс в координатном виде:

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = -2\gamma\dot{x} + 2\gamma\Delta \cos(\varphi)\omega; \\ m\dot{v}_y = -2\gamma\dot{y} - 2\gamma\Delta \sin(\varphi)\omega. \end{cases}$$

А теперь заметим, что в данной системе можно избавиться от производной по времени и связать изменения скоростей, координат и угла поворота:

$$\begin{cases} \frac{m}{\gamma}dv_x = -2dx + 2\Delta \cos(\varphi)d\varphi; \\ \frac{m}{\gamma}dv_y = -2dy - 2\Delta \sin(\varphi)d\varphi. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{\gamma}(v_x - v_{x_0}) = -2(x - x_0) + 2\Delta (\sin(\varphi) - \sin(\varphi_0)); \\ \frac{m}{\gamma}(v_y - v_{y_0}) = -2(y - y_0) + 2\Delta (\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)). \end{cases}$$

Учтём начальные условия для для нашего движения:

$$\begin{cases} v_{x_0} = 0; \\ v_{y_0} = 0; \\ x_0 = 0; \\ y_0 = 0; \\ \varphi_0 = 0; \end{cases}$$

и <<конечные условия>>:

$$\begin{cases} \varphi = \pi; \\ v_x = 0; \\ v_y = 0. \end{cases}$$

Подставляя их в систему, имеем

$$\begin{cases} 0 = -2x + 0; \\ 0 = -2y + 2\Delta (-1 - 1). \end{cases}$$

Отсюда

Ответ:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\Delta \end{pmatrix}$$

C2^{0.30} Определите, какое количество теплоты выделилось в процессе всего движения гантели.

Воспользуемся законом сохранения энергии и свяжем работу потенциальных сил (сила тяжести и сила Архимеда) и рассеянную энергию Q :

$$(m_1 + m_2)g \cdot 2\Delta + F_a \cdot 0 = Q.$$

Ответ:

$$Q = (m_1 - m_2)gl.$$

D1 0.60

В произвольный момент времени запишите полный момент $\vec{M}_{\text{out}}$ внешних сил относительно центра масс гантели. Выразите его через скорость центра масс $\vec{v}$, угловую скорость $\vec{\omega}$, $\vec{\Delta}$, $\vec{g}$ и параметры системы.

Запишем полный момент сил $\vec{M}_{\text{out}}$ для гантели относительно её центра масс:

$$\vec{M}_{\text{out}} = -\gamma \cdot [(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times \vec{v}] + [\vec{\Delta} \times \vec{F}_a] - \gamma \cdot [\vec{r}_1 \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_1]] - \gamma \cdot [\vec{r}_2 \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_2]]$$

Получим ответ, преобразовав векторные произведения с учётом $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = 2\vec{\Delta}$:

$$\vec{M}_{\text{out}} = -2\gamma \cdot [\vec{\Delta} \times \vec{v}] + [\vec{\Delta} \times \vec{F}_a] - \gamma \cdot \vec{\omega} \cdot (r_1^2 + r_2^2).$$

Ответ:

$$\vec{M}_{\text{out}} = -2\gamma \cdot [\vec{\Delta} \times \vec{v}] + [\vec{\Delta} \times \vec{F}_a] - \gamma \cdot \vec{\omega} \cdot (r_1^2 + r_2^2).$$

D2 0.20

Покажите, что при условиях малости затухания и $\varphi_0 \ll 1$ в записи уравнения вращательного движения можно пренебречь моментом, вызванным поступательным движением центра масс.

Запишем теорему о движении центра масс для гантели:

$$(m_1 + m_2) \cdot \dot{\vec{v}} = -2\gamma \vec{v} - 2\gamma \cdot [\vec{\omega} \times \vec{\Delta}].$$

Проинтегрируем его по времени:

$$(m_1 + m_2) \vec{v} = -2\gamma \vec{S} - 2\gamma \cdot \int_0^t [\vec{\omega} \times \vec{\Delta}] dt$$

Первое слагаемое в теореме о движении центра масс всегда направлено против $\vec{v}$, поэтому оценим значение v сверху:

$$v < \frac{2\gamma}{m_1 + m_2} \cdot \Delta \varphi,$$

Откуда в силу малости затухания, первое слагаемое в записанном выше полном моменте сил, оказывается порядка γ^2 , а третье — порядка $\gamma \Rightarrow$ моментом, вызванным поступательным движением центра масс, можно пренебречь.

D3 0.50

Запишите уравнение вращательного движения. С учётом малости затухания и условия $\varphi_0 \ll 1$ и получите уравнение затухающих колебаний угла, образованного гантелью с вертикалью:

$$\ddot{\varphi} + A\dot{\varphi} + B\varphi = 0.$$

Определите коэффициенты A и B .

Из результатов пунктов $D1$ и $D2$ запишем уравнение вращательного движения для гантели относительно её центра масс:

$$I\vec{\varepsilon} = [\vec{\Delta} \times \vec{F}_a] - \gamma \cdot \vec{\omega} \cdot (r_1^2 + r_2^2)$$

Подставим в данное уравнение геометрические параметры из части A , $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, $\omega = \dot{\varphi}$ и спроецируем его на ось, перпендикулярную плоскости рисунка:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\gamma(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1 + m_2) \cdot m_1 m_2} \dot{\varphi} + \frac{\Delta(m_1 + m_2)^2 g}{m_1 m_2 l^2} \varphi = 0$$

Получаем итоговый ответ:

$$A = \frac{\gamma(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1 + m_2) \cdot m_1 m_2}$$
$$B = \frac{\Delta(m_1 + m_2)^2 g}{m_1 m_2 l^2}.$$

Ответ:

$$A = \frac{\gamma(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1 + m_2) \cdot m_1 m_2}$$

$$B = \frac{\Delta(m_1 + m_2)^2 g}{m_1 m_2 l^2}.$$

D4 ^{0.20} Определите период T колебаний гантели.

В предыдущем пункте мы получили уравнение затухающих колебаний, для него период вычисляется по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{B - A^2/4}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\Delta(m_1 + m_2)^2 g}{m_1 m_2 l^2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\gamma(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1 + m_2) \cdot m_1 m_2}\right)^2}}.$$

Ответ:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\Delta(m_1 + m_2)^2 g}{m_1 m_2 l^2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\gamma(m_1^2 + m_2^2)}{(m_1 + m_2) \cdot m_1 m_2}\right)^2}}$$

D5 ^{0.20} Оцените характерное время τ затухания колебаний гантели.

Характерное время затухания колебаний порядка $\tau = \frac{1}{A}$:

$$\tau = \frac{(m_1 + m_2) \cdot m_1 m_2}{\gamma (m_1^2 + m_2^2)}.$$

Ответ:

$$\tau = \frac{(m_1 + m_2) \cdot m_1 m_2}{\gamma (m_1^2 + m_2^2)}.$$

D6 ^{0.20} Определите добротность Q такой колебательной системы.

Добротность Q данной системы найдём по известному соотношению:

$$Q = \frac{\sqrt{B}}{A} = \sqrt{\frac{\Delta g}{m_1 m_2 l^2}} \frac{(m_1 + m_2)^2 m_1 m_2}{\gamma \cdot (m_1^2 + m_2^2)}$$

Ответ:

$$Q = \sqrt{\frac{\Delta g}{m_1 m_2 l^2}} \frac{(m_1 + m_2)^2 m_1 m_2}{\gamma \cdot (m_1^2 + m_2^2)}$$

E1 ^{0.10} Вычислите момент инерции I стержня гантели относительно его оси.

Как известно, момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно его оси симметрии равен

$$I = mR^2/2.$$

E2 ^{0.20} Запишите закон изменения момента импульса гантели относительно точки её крепления.

Производная момента импульса твёрдого тела по времени выражается через полный момент внешних сил:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}_{\text{out}}.$$

E3 ^{0.50} Вычислите угловую скорость $\vec{\Omega}$ регулярной прецессии гантели.

$$\vec{L} = I\vec{\omega};$$

и в данном случае

$$\dot{\vec{L}} = I\dot{\vec{\omega}}.$$

Заметим, что момент силы тяжести равен $\vec{M}_{\text{out}} = \frac{m}{2} \left[\vec{l}, \vec{g} \right]$ и всегда направлен перпендикулярно $\vec{\omega}$ в горизонтальной плоскоти. Таким образом он вызывает вращение вектора $\vec{\omega}$ вокруг вертикали.

Изменение момента импульса за промежуток времени Δt :

$$|\Delta \vec{L}| = L \sin(\theta) \Delta \varphi = M_{\text{out}} \Delta t.$$

Отсюда получаем

$$\Omega = \frac{M_{\text{out}}}{L \sin(\theta)} = \frac{mgl}{2L}.$$

Ответ:

$$\Omega = \frac{gl}{\omega R^2} = \frac{mgl}{2I\omega}.$$

F1

0.30

Вычислите зависимость модуля момента импульса гантели от времени.

Заметим, что на изменение модуля момента импульса гантели влияет только момент $\vec{M}_{\text{fric}}$, так как все остальные моменты внешних сил направлены всегда перпендикулярно $\vec{L}$.

$$\dot{L} = -\alpha \omega = -\frac{\alpha}{I} L \Rightarrow L = L_0 e^{-\frac{\alpha}{I} t}.$$

Ответ:

$$L = L_0 e^{-\frac{\alpha}{I} t}.$$

F2

0.60

Получите дифференциальное уравнение, описывающее изменение угла гантели с вертикалью с течением времени.

Заметим, что момент, вызванный силой вязкого трения на конец m_2 направлен перпендикулярно гантели вниз и вызывает опускание её оси. То есть он обуславливает увеличение угла θ .

Вычислим этот момент:

$$M_2 = l \cdot \gamma \Omega l \sin(\theta).$$

Свяжем поворот момента импульса гантели с моментом M_2 :

$$L \Delta \theta = M_2 \Delta t = \gamma \Omega l^2 \sin(\theta) \Delta t.$$

Остаётся подставить сюда выражение для Ω :

$$\dot{\theta} = \frac{\gamma l^2}{L} \frac{mgl}{2L} = \frac{\gamma mgl^3}{2L^2}.$$

Ответ:

$$\frac{\dot{\theta}}{\sin(\theta)} = \frac{\gamma mgl^3}{2L_0^2} e^{\frac{2\alpha}{I} t}.$$

F3

0.20

Пусть начальный угол равен θ_0 . Чему равна скорость изменения угла в начальный момент?

Ответ:

$$\dot{\theta} = \frac{\gamma m g l^2 \sin(\theta_0)}{2 L_0^2}$$

F4^{0.80}

С начальным условием из предыдущего пункта получите явную зависимость $\theta(t)$.

Неопределённый интеграл слева равен $\ln |\operatorname{tg}(\theta/2)| + C$, а справа $\frac{\gamma m g l^2 I}{2 \alpha L_0^2} \left(e^{\frac{2 \alpha}{I} t} - 1 \right) + C$.

Пределы интегрирования: $\theta_0 \rightarrow \theta$, $0 \rightarrow t$.

Ответ:

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\theta_0}{2} \right) e^{\frac{\gamma m g l^3 I}{4 \alpha L_0^2} \left(e^{\frac{2 \alpha}{I} t} - 1 \right)} \right)$$