

A1^{0.40} Бесконечная однородно заряженная тонкая нить находится в вакууме. Нить расположена по оси z , линейная плотность заряда κ . Определите зависимость электростатического потенциала этой нити $\varphi(r)$ во всем пространстве с точностью до константы. Ответ выразите через ε_0 , κ , r .

Из симметрии электрическое поле направлено радиально. Тогда его значение можно найти из теоремы Гаусса:

$$E(r) = \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Интегрируя, получим выражение для потенциала:

$$\varphi(r) = - \int_a^r E(r) dr = - \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{a}.$$

Здесь a – расстояние, от которого отсчитывается потецинал.

Ответ:

$$\varphi(r) = - \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{a}$$

A2^{0.40} Теперь добавим вторую нить с противоположной линейной плотностью заряда $-\kappa$, параллельную исходной, на очень малом расстоянии до нее. Дипольный момент единицы длины данной конструкции постоянен и равен $\vec{p}$. Определите зависимость электростатического потенциала этой дипольной линии $\varphi(\vec{r})$ во всем пространстве. Потенциал на большом расстоянии от дипольной линии стремится к нулю. Ответ выразите через ε_0 , $\vec{p}$, $\vec{r}$.

Пусть $\vec{a}$ – перпендикулярный нитям вектор, проведенный из точки отрицательно заряженной нити в точку положительно заряженной. Для определенности положим, что положительно заряженная нить расположена на прямой $\vec{r} = 0$. Если r_+ и r_- – расстояния до положительно и отрицательно заряженных нитей соответственно, их суммарный потенциал:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_-}{r_+} + C = \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{|\vec{r} + \vec{a}|}{r} + C.$$

В первом порядке по $\vec{a}$ расстояние

$$r_- = |\vec{r} + \vec{a}| \simeq r + \frac{\vec{a}\vec{r}}{r},$$

тогда потенциал

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\kappa}{2\pi\varepsilon_0} \ln \left(1 + \frac{\vec{a}\vec{r}}{r^2} \right) \simeq \frac{\kappa(\vec{a}\vec{r})}{2\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\vec{r}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Здесь использовано $\vec{p} = \kappa\vec{a}$, а константа равна 0, поскольку на бесконечности это выражение стремится к 0.

Ответ:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{r}\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

A3^{0.60} Дифференцируя выражение, полученное в предыдущем пункте, найдите электрическое поле $\vec{E}(\vec{r})$ во всем пространстве. Ответ выразите через ε_0 , $\vec{p}$, $\vec{r}$.

Сделаем в выражении для потенциала замену $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{\delta}$ и найдем изменение потенциала в первом порядке по $\vec{\delta}$. Используем соотношения для расстояния

$$\Delta\varphi = (\vec{r} + \vec{\delta})^2 \simeq r^2 + 2(\vec{r}\vec{\delta}), \quad \frac{1}{(\vec{r} + \vec{\delta})^2} \simeq \frac{1}{r^2} - \frac{2\vec{r}\vec{\delta}}{r^4}.$$

Тогда для разности потенциала получим

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r} + \vec{\delta}) - \varphi(\vec{r}) &\simeq \frac{\vec{p}(\vec{r} + \vec{\delta})}{2\pi\varepsilon_0(\vec{r} + \vec{\delta})^2} - \frac{\vec{r}\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \left((\vec{r} + \vec{\delta}) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\vec{r}\vec{\delta}}{r^4} \right) - \vec{r}r^2 \right) = \\ &= \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\vec{\delta}}{r^2} - \frac{2(\vec{r}\vec{\delta})\vec{r}}{r^4} \right) = - \frac{2(\vec{p}\vec{r})(\vec{r}\vec{\delta}) - (\vec{p}\vec{\delta})}{2\pi\varepsilon_0 r^4}. \end{aligned}$$

С учетом определения градиента

$$\Delta\varphi = \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\delta}, \quad \vec{\nabla}\varphi = - \frac{2(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^4}.$$

Тогда электрическое поле

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = \frac{2(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^4}.$$

Производную можно найти и напрямую. Введем единичные векторы: $\vec{e}_r$ – сонаправленный с радиус-вектором $\vec{r}$, $\vec{e}_\theta$ – перпендикулярный ему и дипольным нитям, сонаправлен с положительным направлением отсчета θ . Запишем выражение для электрического поля:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{2\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_\theta$$

Выразим $\vec{e}_\theta$:

$$\frac{\vec{p}}{p} = \vec{e}_r \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{pr} - \vec{e}_\theta \sin \theta$$

Запишем ответ:

Ответ:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r^2} \left(2 \frac{\vec{r}(\vec{r}\vec{p})}{r^2} - \vec{p} \right)$$

Данный ответ также может быть получен при рассмотрении полей двух заряженных нитей. Для этого найдём в векторной форме поле 1 нити:

$$\vec{E} = \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}$$

И представим поле диполя в виде суперпозиции полей двух нитей:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^2} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^2} \right) = \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}}{r^2} - \frac{\vec{r} + \vec{a}}{(\vec{r} + \vec{a})^2} \right) = \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}}{r^2} - \frac{\vec{r} + \vec{a}}{r^2 + a^2 + 2(\vec{r}, \vec{a})} \right) \approx \\ &\approx \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0 r^2} \left(\vec{r} - (\vec{r} + \vec{a}) \left(1 - 2 \frac{(\vec{r}, \vec{a})}{r^2} \right) \right) \approx \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0 r^2} \left(2 \frac{\vec{r}(\vec{r}, \vec{a})}{r^2} - \vec{a} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r^2} \left(2 \frac{\vec{r}(\vec{r}, \vec{p})}{r^2} - \vec{p} \right) \end{aligned}$$

A4^{0.60}

Покажите, что распределение поля в пространстве вне цилиндра равно суперпозиции однородного внешнего поля $\vec{E}_0$ и поля дипольной линии с линейной плотностью дипольного момента $\vec{p}$. Используйте выражение для поля дипольной линии в вакууме. Определите $\vec{p}$. Ответ выразите через ϵ_1 , ϵ_2 , $\vec{E}_0$, ϵ_0 , R . Найденное вами значение $\vec{p}$ включает в себя как дипольный момент цилиндра, так и дипольный момент поляризованных зарядов среды.

Запишем условия для компонент электрического поля на границе среда–цилиндр:

$$\begin{cases} E_{\tau 2} = E_{\tau 2} \\ \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2} \end{cases}$$

Предполагая, что поле снаружи – суперпозиция внешнего однородного поля и поля диполя, а внутри – однородное и сонаправленное с $\vec{E}_0$, перепишем предыдущую систему уравнений:

$$\begin{cases} E_{in} \sin \theta = E_0 \sin \theta - \frac{p \sin \theta}{2\pi\epsilon_0 R^2} \\ \epsilon_1 E_{in} \cos \theta = \epsilon_2 \left(E_0 \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 R^2} \right), \end{cases}$$

При $\vec{p} = 2\pi\epsilon_0 \vec{E}_0 R^2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$ записанные выше условия выполняются в каждой точке цилиндра, значит, по теореме о единственности, данное решение верно.

Ответ:

$$\vec{p} = 2\pi\epsilon_0 \vec{E}_0 R^2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

A5^{0.30}

Определите зависимость электрического поля $\vec{E}(\vec{r})$ во всем пространстве. Ответ выразите через ϵ_1 , ϵ_2 , $\vec{E}_0$, $\vec{r}$.

Подставим найденное значение $\vec{p}$, получим распределение поля во всем пространстве.

Ответ: Внутри цилиндра ($r \leq R$):

$$\vec{E}_1 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \vec{E}_0;$$

снаружи цилиндра ($r > R$):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R^2 \left(\frac{2(\vec{r} \vec{E}_0) \vec{r}}{r^4} - \frac{\vec{E}_0}{r^2} \right).$$

A6^{1.00}

Пусть проводимость и диэлектрическая проницаемость цилиндра λ_1, ε_1 , а окружающей среды λ_2, ε_2 . Электрическое поле на большом расстоянии от цилиндра $\vec{E}_0$. Распределение тока полностью установилось. Известно, что поле снаружи цилиндра все еще равно суперпозиции внешнего поля и поля диполя, а поле внутри цилиндра однородно. Однако теперь на поверхности цилиндра возникает распределение свободных (не связанных с поляризацией) зарядов с плотностью $\sigma_f(\theta)$. Определите объемную плотность тока $\vec{j}_1$ внутри цилиндра и поверхностную плотность заряда $\sigma_f(\theta)$ в зависимости от угла θ . Направлению $\vec{E}_0$ отвечает $\theta = 0$.

Примечание: в проводящей среде объемная плотность тока связана с электрическим полем соотношением $\vec{j} = \lambda \vec{E}$, где λ – проводимость среды.

Примечание: граничные условия на нормальные компоненты электрического поля можно получить, рассматривая нормальные составляющие плотности тока на границе цилиндра и среды. По цилиндру не течет поверхностных токов.

Запишем новые граничные условия с учётом токов и зарядов

Условие на токи:

$$\lambda_1 E_{n1} = j_{n1} = j_{n2} = \lambda_2 E_{n2}$$

Условие на тангенциальные компоненты поля:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$$

При близком рассмотрении участок границы можно считать плоским, а заряд на границе постоянным, тогда записав теорему Гаусса для вектора электростатической индукции получим:

$$-\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{n1} + \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{n2} = \sigma_f$$

Подставив в первые два условия форму поля получим систему:

$$\begin{cases} E_{in} \sin \theta = E_0 \sin \theta - \frac{p \sin \theta}{2\pi \varepsilon_0 R^2} \\ \varepsilon_1 E_{in} \cos \theta = \varepsilon_2 \left(E_0 \cos \theta + \frac{p \cos \theta}{2\pi \varepsilon_0 R^2} \right), \end{cases}$$

которая аналогична A4:

$$\vec{p} = 2\pi \varepsilon_0 \vec{E}_0 R^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$\vec{E}_{in} = \frac{2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \vec{E}_0$$

Подставим выражения в граничное условие на σ_f :

$$\sigma_f = -\varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} E_0 \cos \theta + \varepsilon_0 \varepsilon_2 \left(E_0 + E_0 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) \cos \theta$$

Получим ответ:

Ответ:

$$\sigma_f = 2\varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon_2 \lambda_1 - \varepsilon_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cos \theta$$

$$\vec{j}_1 = \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \vec{E}_0$$

A7^{0.70}

Пусть теперь цилиндр идеально проводящий, а проводимость окружающей его среды λ_2 , ее диэлектрическая проницаемость ε_2 . Внешнее электрическое поле отсутствует. Начальный заряд цилиндра равен q_0 . Найдите зависимость заряда цилиндра $q(t)$ от времени. Получите выражение для времени τ_2 , за которое заряд цилиндра уменьшается в 2 раза. Ответы выразите через $\lambda_2, \varepsilon_0, \varepsilon_2$.

Т. к. $\vec{j} = \lambda_2 \vec{E}$, полный ток, стекающий с цилиндра, $I = \lambda_2 \Phi$. Получим:

$$-\dot{q} = \lambda_2 \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} \Rightarrow q = q_0 e^{-\frac{\lambda_2 t}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}}$$

Получим ответ:

Ответ:

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\lambda_2} \ln(2)$$

В1 0.10

Запишите соотношение между касательными компонентами электрических полей на границе раздела среды и цилиндра.

Из условия потенциальности электрического поля:

Ответ:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$$

В2 0.50

При движении цилиндра свободные заряды на поверхности цилиндра вращаются вместе с ним. Поэтому на поверхности цилиндра возникает поверхностная плотность тока $i(\theta)$. Выразите ее через ω , R и плотность свободных зарядов. Величина $i(\theta)$ считается положительной, если ток направлен в сторону возрастания θ .

Ответ:

$$i(\theta) = R\omega\sigma_f(\theta)$$

В3 0.70

Рассмотрим малый участок поверхности цилиндра, отвечающий интервалу углов $(\theta_0, \theta_0 + d\theta)$ площади $dS = RLd\theta$. Через границы $\theta = \theta_0$ в него втекает заряд за счет $i(\theta_0)$, через границу при $\theta = \theta_0 + d\theta$ вытекает ток за счет $i(\theta_0 + d\theta)$. Также в него втекает нормальный ток с плотностью j_{1n} и вытекает нормальный ток с плотностью j_{2n} . В установившемся режиме полный заряд рассматриваемой области не меняется. Запишите следующее из закона сохранения заряда соотношение между токами $i(\theta_0)$, $i(\theta_0 + d\theta)$, j_{1n} , j_{2n} . В ответ также может входить R и $d\theta$.

Из закона сохранения заряда получим соотношение:

$$Li(\theta_0) - Li(\theta_0 + d\theta) + dSj_{1n} - dSj_{2n} = 0$$

Раскрыв dS , получим:

Ответ:

$$i(\theta_0) - i(\theta_0 + d\theta) + R(j_{1n} - j_{2n})d\theta = 0$$

В4 0.50

В соотношение из предыдущего пункта подставьте выражения для нормальных токов через нормальные компоненты электрического поля и поверхностных токов через плотность заряда. Получите связь между E_{1n} , E_{2n} , ω , λ_1 , λ_2 , $\partial\sigma_f/\partial\theta$.

Устремляя $d\theta$ к нулю, получим:

$$-L\frac{\partial i}{\partial\theta}(\theta_0) + RL(j_{1n} - j_{2n}) = 0$$

Выведем ответ, раскрыв i и учитывая, что $\vec{j} = \lambda\vec{E}$, получаем:

Ответ:

$$-\omega\frac{\partial\sigma_f}{\partial\theta} + \lambda_1 E_{1n} - \lambda_2 E_{2n} = 0$$

В5 0.40

Выразите плотность свободных зарядов σ_f через компоненты электрического поля вблизи границы. Используя результаты пункта В4, получите отсюда соотношение только между компонентами электрического поля E_{1n} , E_{2n} и их производными по θ . В ответ также могут входить ε_1 , λ_1 , ε_2 , λ_2 , ω .

Из предыдущего пункта:

$$-\omega\frac{\partial\sigma_f}{\partial\theta} + \lambda_1 E_{1n} - \lambda_2 E_{2n} = 0$$

Запишем граничное условие на вектор электростатической индукции:

$$-\varepsilon_0\varepsilon_1E_{n1}+\varepsilon_0\varepsilon_2E_{n2}=\sigma_f$$

продифференцируем его и подставим $\frac{\partial\sigma_f}{\partial\theta}$:

Ответ:

$$\left(\lambda_1+\omega\varepsilon_1\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial\theta}\right)E_{1n}=\left(\lambda_2+\omega\varepsilon_2\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial\theta}\right)E_{2n}$$

В6 0.50

Покажите, что выражения для комплексных проницаемостей можно записать в виде

$$\varepsilon_1^*=\varepsilon_1+\frac{i\lambda_1}{\varepsilon_0\omega},\quad \varepsilon_2^*=\varepsilon_2+\frac{i\lambda_2}{\varepsilon_0\omega}.$$

Далее эти формулы можно использовать без доказательства.

Примечание: Поскольку цилиндр вращается с угловой скоростью ω , $d\theta/dt=+\omega$ и производную по углу θ можно выразить через производную по времени во вращающейся системе отсчета.

Поле в системе отсчета цилиндра вращается с угловой скоростью $-\omega$. Поэтому $\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial t}=\frac{-i\omega}{\omega}=-i$.

Граничное условие:

$$(\lambda_1-i\omega\varepsilon_1\varepsilon_0)E_{1n}=(\lambda_2-i\omega\varepsilon_2\varepsilon_0)E_{2n}$$

Отсюда:

Ответ:

$$\varepsilon_1^*=\varepsilon_1+\frac{i\lambda_1}{\omega\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_2^*=\varepsilon_2+\frac{i\lambda_2}{\omega\varepsilon_0}$$

В7 0.50

Определите комплексную амплитуду линейной плотности дипольного момента цилиндра $\vec{p}^*$. Ответ выразите через ε_1 , λ_1 , ε_2 , λ_2 , ω , ε_0 , R , $\vec{E}_0^*$.

Аналогично электростатическому случаю из части А, мы можем записать ответ, подставив комплексные диэлектрические проницаемости. Отсюда имеем:

$$\vec{p}^*=2\pi\varepsilon_0\vec{E}_0^*R^2\frac{\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^*+\varepsilon_2^*}=2\pi\varepsilon_0\vec{E}_0^*R^2\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\frac{i(\lambda_1-\lambda_2)}{\omega\varepsilon_0}}{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\frac{i(\lambda_1+\lambda_2)}{\omega\varepsilon_0}}$$

Ответ:

$$\vec{p}^*=2\pi\varepsilon_0\vec{E}_0^*R^2\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2+\frac{i(\lambda_1-\lambda_2)}{\omega\varepsilon_0}}{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\frac{i(\lambda_1+\lambda_2)}{\omega\varepsilon_0}}$$

В8 0.80

Определите проекции на оси x и y вектора $\vec{p}$ в лабораторной системе отсчета.

Выразим p_x :

$$p_x=\text{Re}(\vec{p}^*,\vec{e}_x)$$

Выражение для p_y аналогично:

$$p_y=\text{Re}(\vec{p}^*,\vec{e}_y)$$

Используем, что $\vec{E}_0^*=E_0(\vec{e}_x-i\vec{e}_y)$. Преобразуем выражение из предыдущего пункта:

$$\vec{p}^* = 2\pi\epsilon_0\vec{E}_0^*R^2\frac{\left(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{i(\lambda_1 - \lambda_2)}{\omega\epsilon_0}\right)\left(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \frac{i(\lambda_1 + \lambda_2)}{\omega\epsilon_0}\right)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\omega^2\epsilon_0^2}} =$$

$$= 2\pi\epsilon_0\vec{E}_0^*R^2\frac{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{\omega^2\epsilon_0^2} + 2i\frac{\lambda_1\epsilon_2 - \lambda_2\epsilon_1}{\omega\epsilon_0}}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\omega^2\epsilon_0^2}}$$

и получим ответы:

Ответ:

$$p_x = 2\pi R^2\epsilon_0 E_0 \frac{\omega^2\epsilon_0^2(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) + \lambda_1^2 - \lambda_2^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\omega\epsilon_0)^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2},$$

$$p_y = -4\pi\omega R^2\epsilon_0^2 E_0 \frac{(\epsilon_1\lambda_2 - \epsilon_2\lambda_1)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\omega\epsilon_0)^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}$$

B9^{0.60} Определите проекцию момента сил M_E , действующего на цилиндр (с окружающими его поляризационными зарядами среды) со стороны внешнего электрического поля, на ось z . Ответ выразите через $E_0, \epsilon_0, \omega, \epsilon_1, \lambda_1, \epsilon_2, \lambda_2, R, L$.

Полный эффективный дипольный момент цилиндра равен $\vec{p}L$, тогда:

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}_0]L$$

Выразим M_z :

$$M_z = -p_y E_0 L = 4\pi\omega L R^2 \epsilon_0^2 E_0^2 \frac{(\epsilon_1\lambda_2 - \epsilon_2\lambda_1)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\omega\epsilon_0)^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}$$

Ответ:

$$M_z = 4\pi\omega L R^2 \epsilon_0^2 E_0^2 \frac{(\epsilon_1\lambda_2 - \epsilon_2\lambda_1)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\omega\epsilon_0)^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}$$

B10^{0.40} При определенном соотношении между параметрами системы полученный выше момент сил вызывает дальнейшее увеличение угловой скорости цилиндра. Укажите соотношение между параметрами, при котором это возможно.

Вращение возможно при $M_z > 0$, это соответствует соотношению:

$$\epsilon_2/\lambda_2 < \epsilon_1/\lambda_1$$

Обратим внимание, что данное выражение не случайно: его физический смысл: характерное время разрядки среды меньше характерного времени разрядки цилиндра, поэтому может возникать явление запаздывания переполаризации, что и является причиной вращения.

Ответ:

$$\epsilon_2/\lambda_2 < \epsilon_1/\lambda_1$$

C1^{0.70} Момент сил можно записать в виде $M_\eta = -\alpha\eta^a\omega^b R^c L^d$, где α – безразмерная постоянная. Используя метод размерностей и физические соображения, определите показатели степени a, b, c, d .

Движения жидкости вдоль оси z нет, значит движение элементов жидкости никак не зависит от z из симметрии. Площадь боковой поверхности цилиндра пропорциональна L , расстояние от точки приложения силы до оси не зависит от L , следовательно:

Ответ:

$$d = 1$$

Для нахождения остальных степеней воспользуемся методом размерностей:

$$\text{Н} \cdot \text{м} = (\text{Н} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с})^a \cdot \text{с}^{-b} \cdot \text{м}^c \cdot \text{м}$$

Приравнивая коэффициенты перед Ньютонами, получаем:

Ответ:

$$a = 1$$

Приравнивая коэффициенты перед секундами, получаем:

Ответ:

$$b = 1$$

Приравнивая коэффициенты перед метрами, получаем:

Ответ:

$$c = 2$$

C2^{0.30} Найдите момент сил вязкого трения M , действующий на внешнюю сторону цилиндрического слоя жидкости радиуса r , где $r > R$. Выразите ответ через η , r , L , $\frac{\partial \omega}{\partial r}$.

Момент сил, действующий на малый цилиндрического слой жидкости:

$$M = \tau_{\theta z} \cdot S \cdot r = 2\pi\eta r^3 L \frac{\partial \omega}{\partial r}$$

Ответ:

$$M = \tau_{\theta z} \cdot S \cdot r = 2\pi\eta r^3 L \frac{\partial \omega}{\partial r}$$

C3^{1.20} Определите коэффициент α в формуле для момента сил M_η .

Так как каждый элемент жидкости вращается равномерно, то момент действующий на внешнюю сторону слоя жидкости, будет равен моменту, с которым этот слой жидкости действует на слой под ним. Т. е. $M = M_\eta = \text{const}$.

Разделим переменные и проинтегрируем данное уравнение:

$$\frac{M_\eta}{2\pi\eta L} \frac{dr}{r^3} = d\omega$$

Так как $\omega(r \rightarrow \infty) = 0$, и $\omega(R) = \omega_0$, то:

$$\frac{M_\eta}{2\pi\eta L} \int_\infty^R \frac{dr}{r^3} = \omega_0$$

Запишем итоговое выражение:

Ответ:

$$M_\eta = -4\pi\omega_0\eta LR^2$$

C4^{0.30} Сообщим цилиндру маленькую угловую скорость $\delta\omega$. Если внешнее электрическое поле больше некоторого критического значения $E_0 > E_{cr}$, угловая скорость будет возрастать. Выразите критическое поле E_{cr} через ε_1 , ε_2 , ε_0 , η , λ_1 , λ_2 , α .

Условие минимума – $\omega_0 = 0$. Пренебрегая слагаемым с ω^2 в знаменателе, получим:

Ответ:

$$E_{cr} = \sqrt{\frac{\alpha\eta}{4\pi\varepsilon_0^2} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{(\varepsilon_1\lambda_2 - \varepsilon_2\lambda_1)}}$$

C5 0.50 Пусть $E_0 > E_{cr}$. Определите установившуюся угловую скорость цилиндра ω_0 .
 Ответ выразите через $E_0, E_{cr}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \lambda_1, \varepsilon_2, \lambda_2$.

Условие установления скорости:

$$M_z + M_\eta = 0$$

Отсюда получаем:

Ответ:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\frac{(\varepsilon_1 \lambda_2 - \varepsilon_2 \lambda_1) \varepsilon_0^2 E_0^2}{\eta} - (\lambda_1 + \lambda_2)^2}}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$