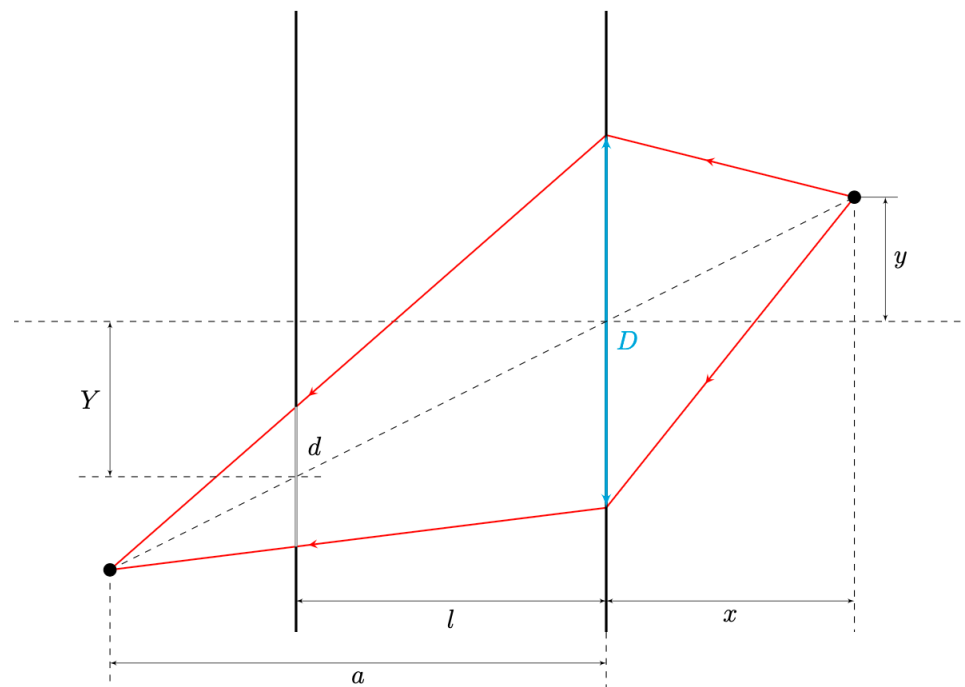


Изображение проволоки симметрично относительно Y , поэтому проволока лежит в плоскости xy . Заметим, что каждая точка проволоки даёт на экране точку (если камера сфокусирована на эту точку) или круг (из подобия конусов).



Найдём положение окружности и её размеры для точки с координатами $(x, y, 0)$. Координаты центра окружности из подобия треугольников:

$$(Y, Z) = \left(\frac{yl}{x}, 0 \right).$$

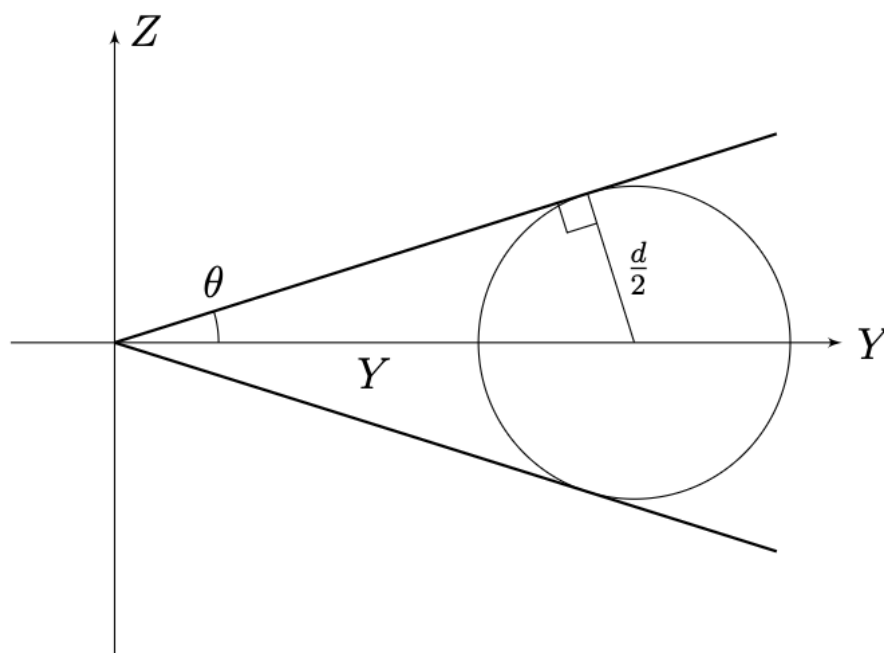
Для диаметра:

$$\frac{d}{D} = \frac{a-l}{a} = 1 - \frac{l}{a}.$$

Подставим значение $1/a$ из формулы тонкой линзы.

$$\frac{d}{D} = 1 - l \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{x} \right) = 1 - \frac{l(x-f)}{fx}.$$

Найдём зависимость d от Y для $Y > 0$.



По условию $\tan \theta = k$.

$$d = 2Y \sin \theta = \frac{2k}{\sqrt{1+k^2}} \cdot Y = \gamma Y = \gamma \cdot \frac{yl}{x},$$

где $\gamma = \frac{2k}{\sqrt{1+k^2}}$.

Подставим это в полученное ранее выражение для d .

$$\frac{d}{D} = \frac{\gamma yl}{Dx} = 1 - \frac{l(x-f)}{fx}$$

Выразим $y(x)$:

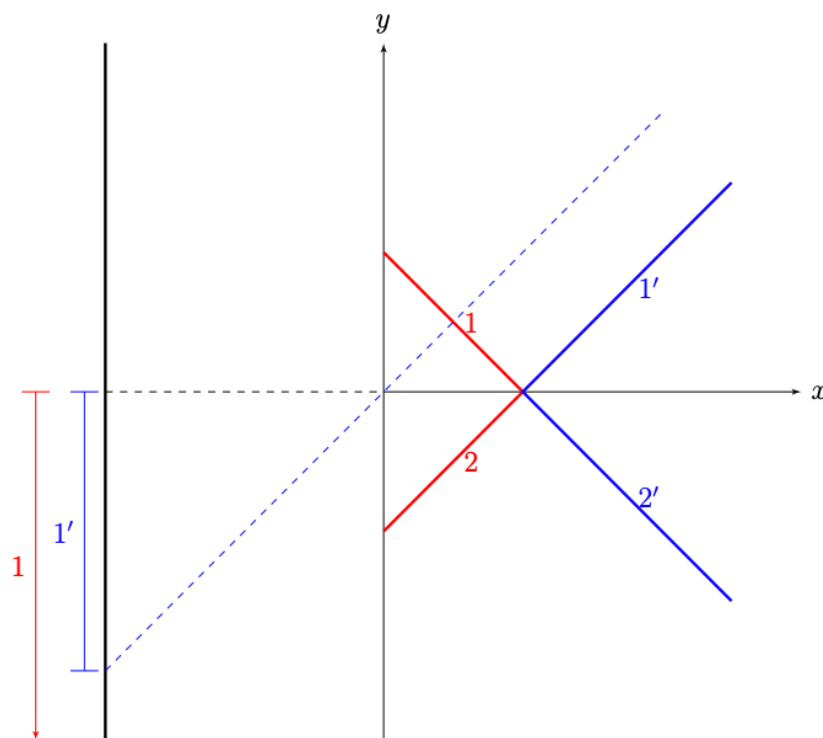
$$y = \frac{Dx}{\gamma l} - \frac{D(x-f)}{\gamma f} = \frac{D}{\gamma} - \frac{Dx}{\gamma} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{l} \right) = \frac{D}{\gamma} - \frac{Dx(l-f)}{\gamma fl}.$$

Заметим, что так как проволока расположена в области $x > 0$ и изображение точки проволоки в центре экрана является точечным, то камера сфокусирована на одну из точек проволоки, поэтому $l > f$.

Заметим, что мы рассматривали случай $a \geq l$, если это не так, то все уравнения останутся верны, но знак у d поменяется. То есть для рассмотрения $a < l$ достаточно в полученных выражениях изменить знак γ . Таким образом мы получаем, что возможные положения точек определяющих форму изображения:

$$y = \pm \frac{D(l-f)\sqrt{1+k^2}}{2klf} \left(\frac{lf}{l-f} - x \right).$$

Возможно проволока содержит ещё участки, изображения которых перекрывают изображениями точек на этих прямых, но тогда проволока будет иметь большую длину, что противоречит условию. Поэтому полностью лежит на этих прямых.



Заметим, что угловой размер частей прямых 1' и 2' меньше 90° поэтому они могут давать в изображении окружности с ограниченным отрезком положений центров, ещё для фиксированного углового размера длина проволоки на участках 1 и 2 всегда будет меньше, поэтому проволока имеет форму уголка из отрезков 1 и 2:

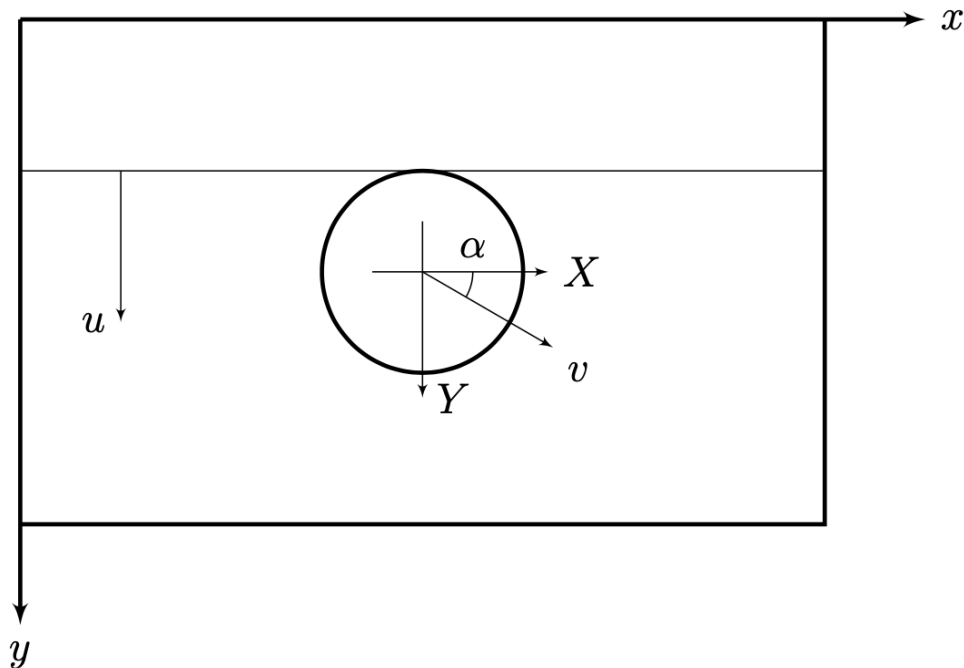
Ответ:

$$y = \pm \frac{D(l-f)\sqrt{1+k^2}}{2klf} \left(\frac{lf}{l-f} - x \right)$$

при $x \in \left[0, \frac{lf}{l-f} \right]$.

В1 2.00 Используя циркуль и линейку без делений, постройте прямую, параллельную направлению скорости шайбы.

Поймём, как формируется изображение. Введём координаты XY , привязанные к шайбе и обозначающие положение точки на ней, и xu , определяющие положение на фотографии. Пусть скорость движения линии, которую снимает камера в конкретный момент, равна u ; центр шайбы был сфотографирован в точке (x_0, y_0) и в момент времени t_0 .



Угол между скоростью шайбы и осью x обозначим α . Найдём координаты на фотографии для произвольной точки шайбы (X, Y) . Момент фотографирования этой точки:

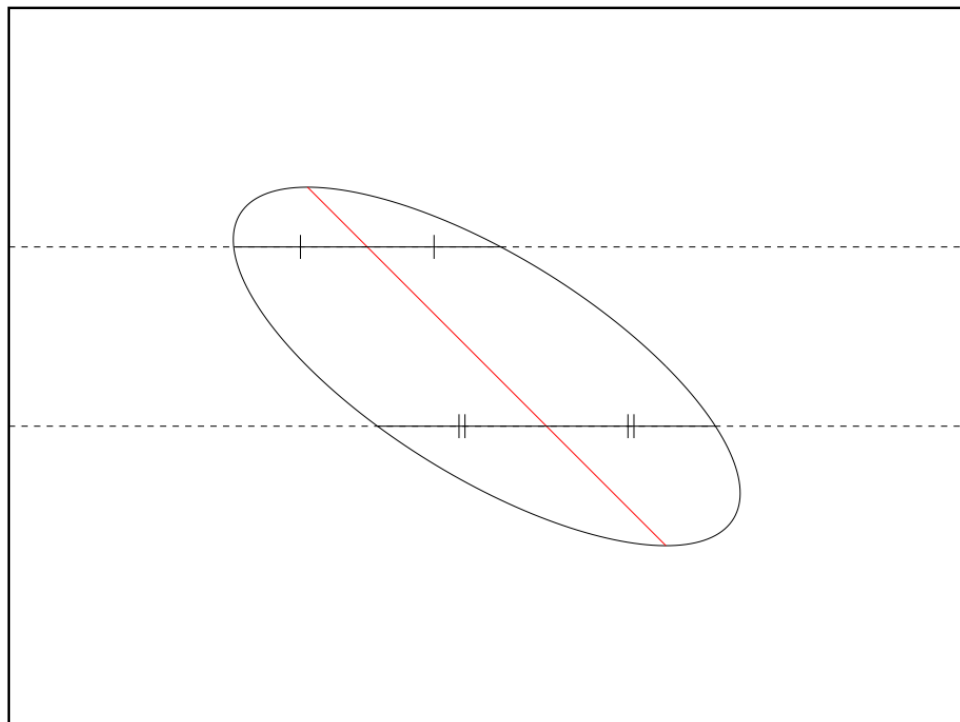
$$t = t_0 + \frac{Y}{u - v \sin \alpha}.$$

Координаты равны:

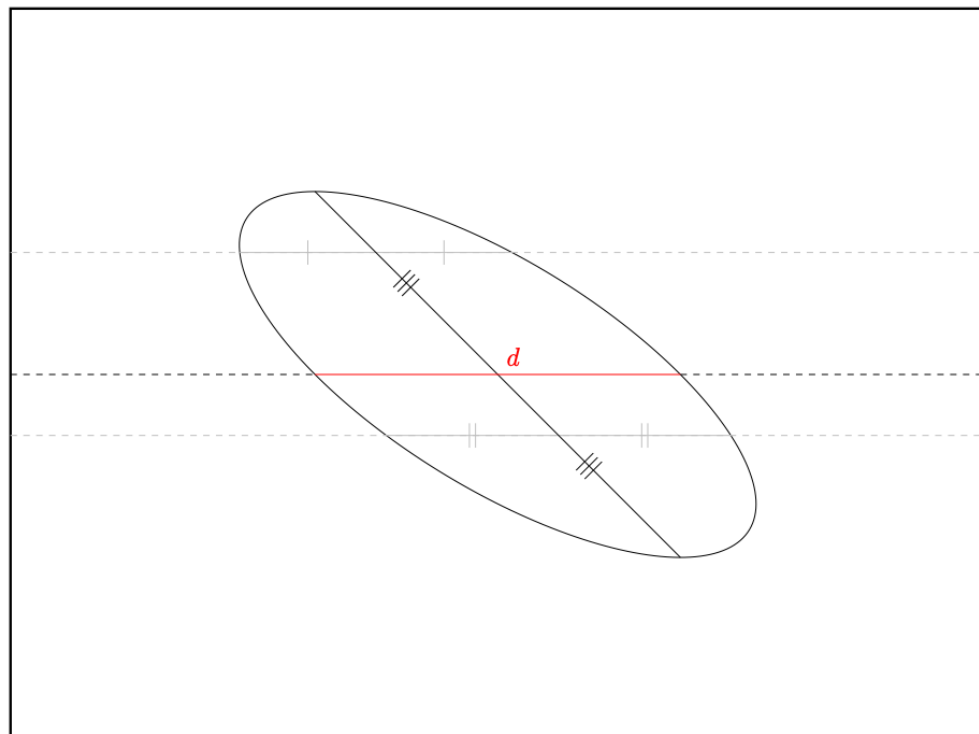
$$x = x_0 + X + v \cos \alpha (t - t_0) = x_0 + X + \frac{v \cos \alpha}{u - v \sin \alpha} Y,$$

$$y = y_0 + u(t - t_0) = y_0 + \frac{u}{u - v \sin \alpha} Y.$$

Заметим, что преобразование координат линейно. Значит, прямые на шайбе являются прямыми на изображении. Построим возможные направления скорости. Получим изображение прямой $X = 0$, для этого проведём горизонтальные прямые, изображение $X = 0$ будет прямой проходящей через центры пересечений горизонтальных прямых с изображением шайбы (так как при фиксированном Y и соответственно y координаты x и X отличаются только на константу).

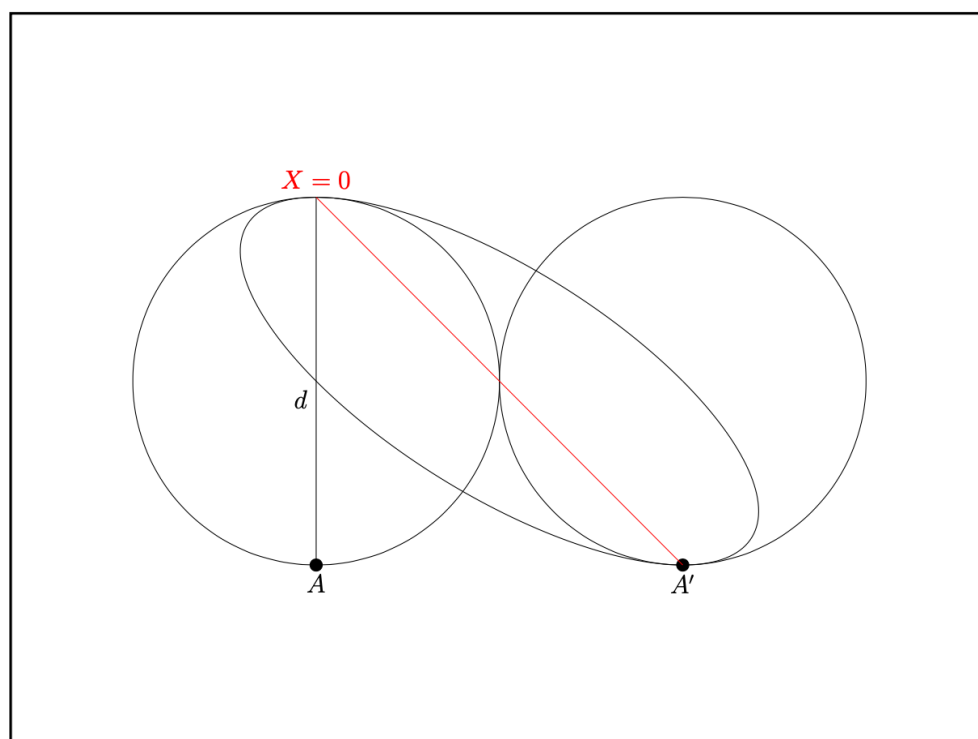


Теперь получим отрезок по длине равный диаметру. Для этого достаточно провести горизонтальный отрезок через центр изображения $X = 0$.

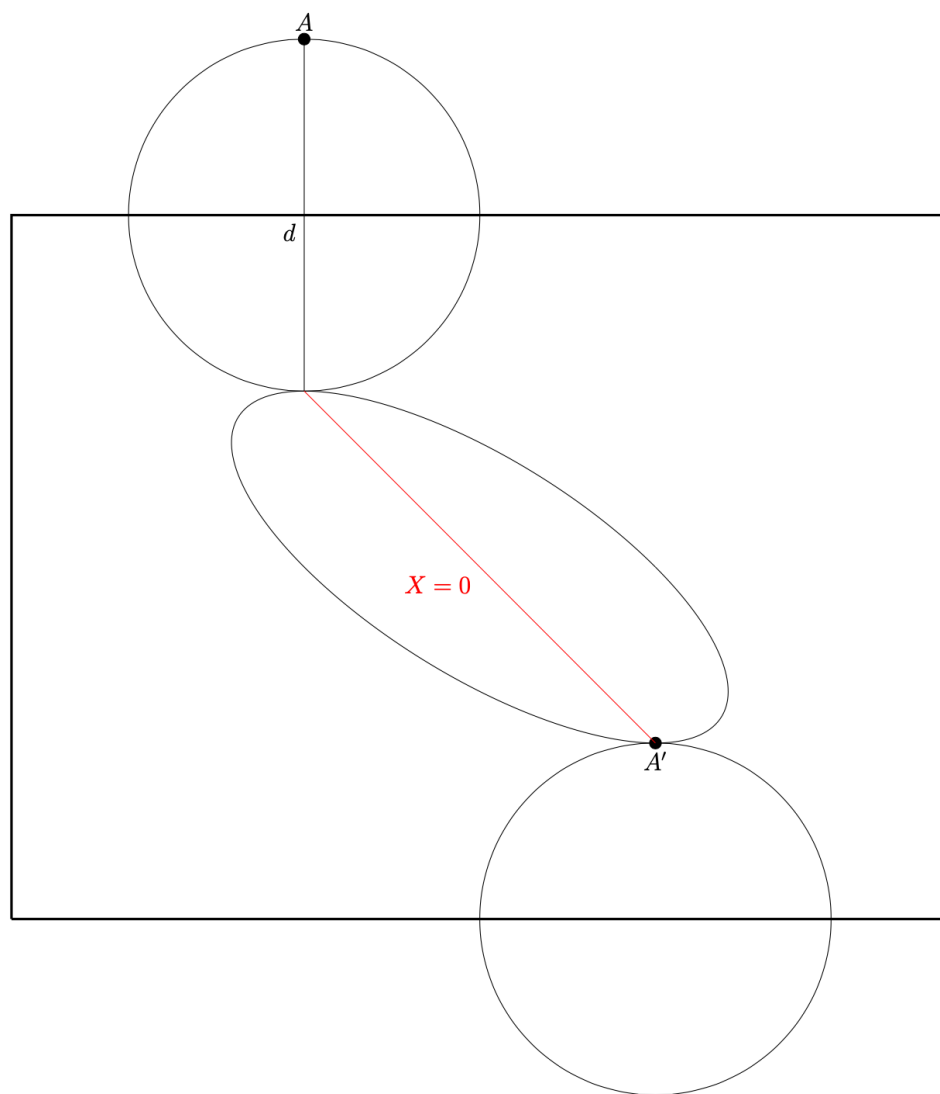


Далее есть два варианта, как может происходить фотографирование в зависимости от скорости шайбы. Если $u > v \sin \alpha$, то верхняя точка изображения является верхней точкой шайбы. И соответственно наоборот если $u < v \sin \alpha$, то верхняя точка изображения является нижней точкой шайбы. Нарисуем начальное и конечное состояние шайбы в зависимости от соотношения скоростей.

$u > v \sin \alpha$:

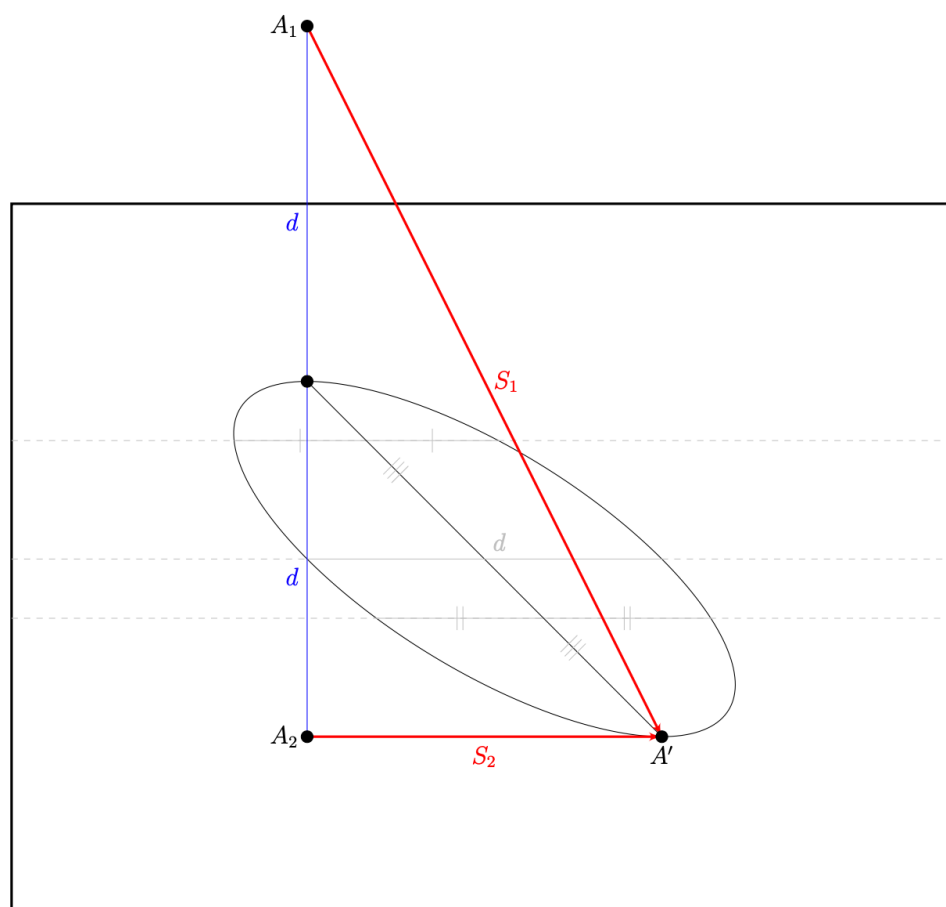


$u < v \sin \alpha$:



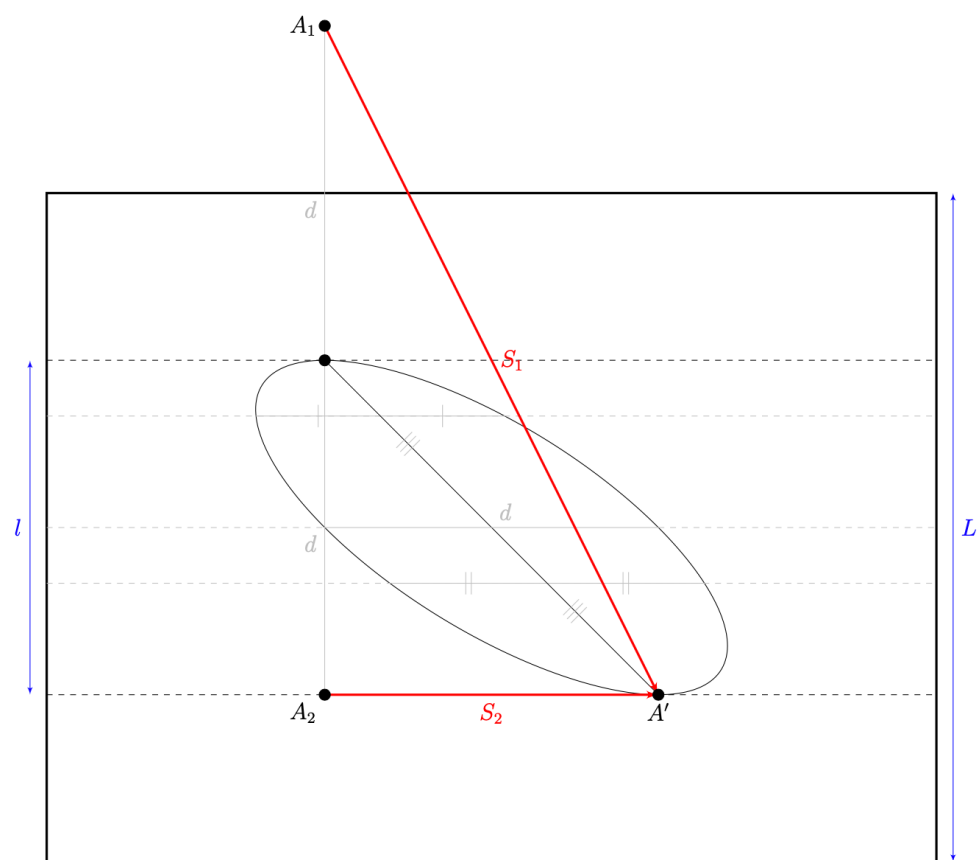
Заметим, что таким образом мы можем получить возможное направление скорости: получаем точку A , построив вертикальный отрезок длиной d с одним концом в верхней точке изображения шайбы, скорость будет направлена по $\overrightarrow{AA'}$.

Ответ:



B2^{1.00} Используя дополнительно линейку с делениями, найдите модуль скорости шайбы.

Осталось определить модуль скорости. Мы построили перемещение точки A за время съёмки шайбы τ . Можем выразить это время через полное время фотографирования T .



$$\tau = \frac{l}{L}T = 0.5 \cdot T = 5 \text{ мс}$$

По фотографии можем определить перемещение шайбы:

$$\frac{S_1}{d} = 2.24; \quad \frac{S_2}{d} = 1.00.$$

$$S_1 = 17.1 \text{ см}; \quad S_2 = 7.62 \text{ см}$$

Осталось посчитать величину скорости $v = S/\tau$.

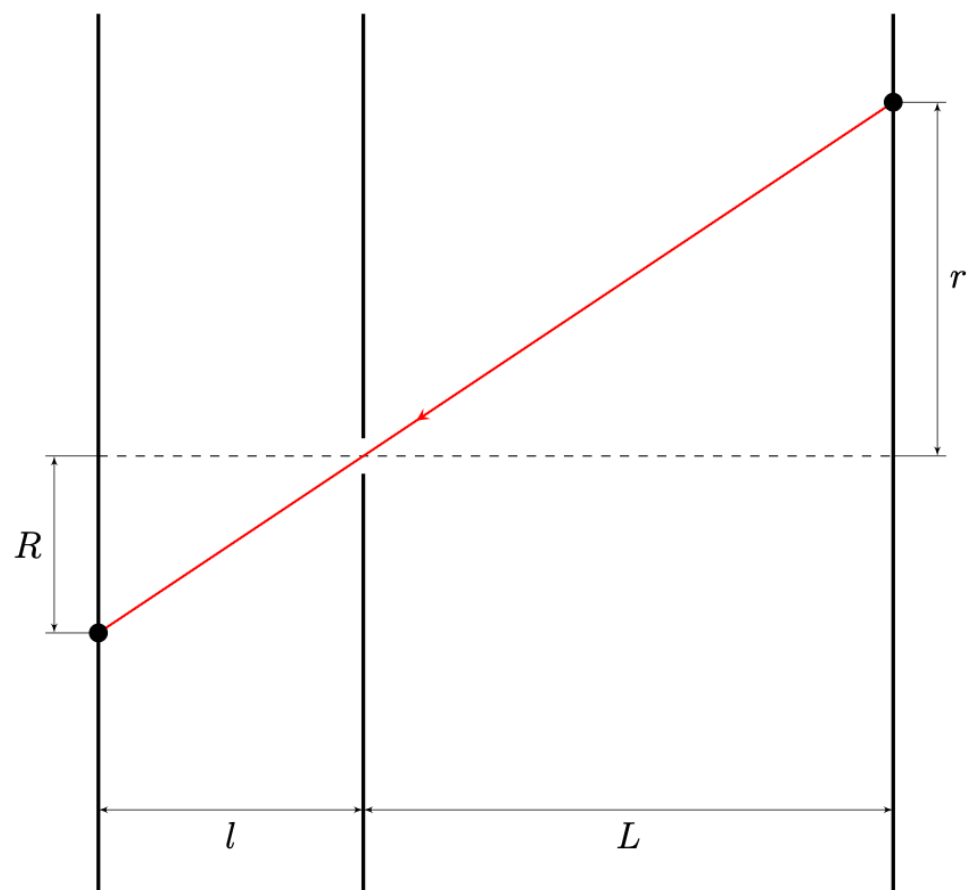
Ответ:

$$v_1 = 34.1 \text{ м/с}; \quad v_2 = 15.2 \text{ м/с}$$

C1^{0.50}

Покажите, что линейное увеличение камеры-обскуры постоянно и найдите α .

Рассмотрим, как формируется изображение одной точки.



Из подобия получаем:

$$\frac{R}{r} = \frac{l}{L}.$$

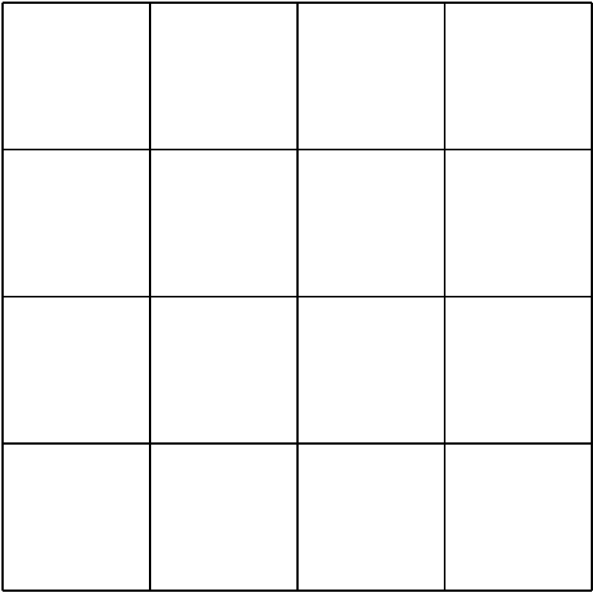
Полученное выражение не зависит от положения точки, поэтому дисторсия не наблюдается.

Ответ:

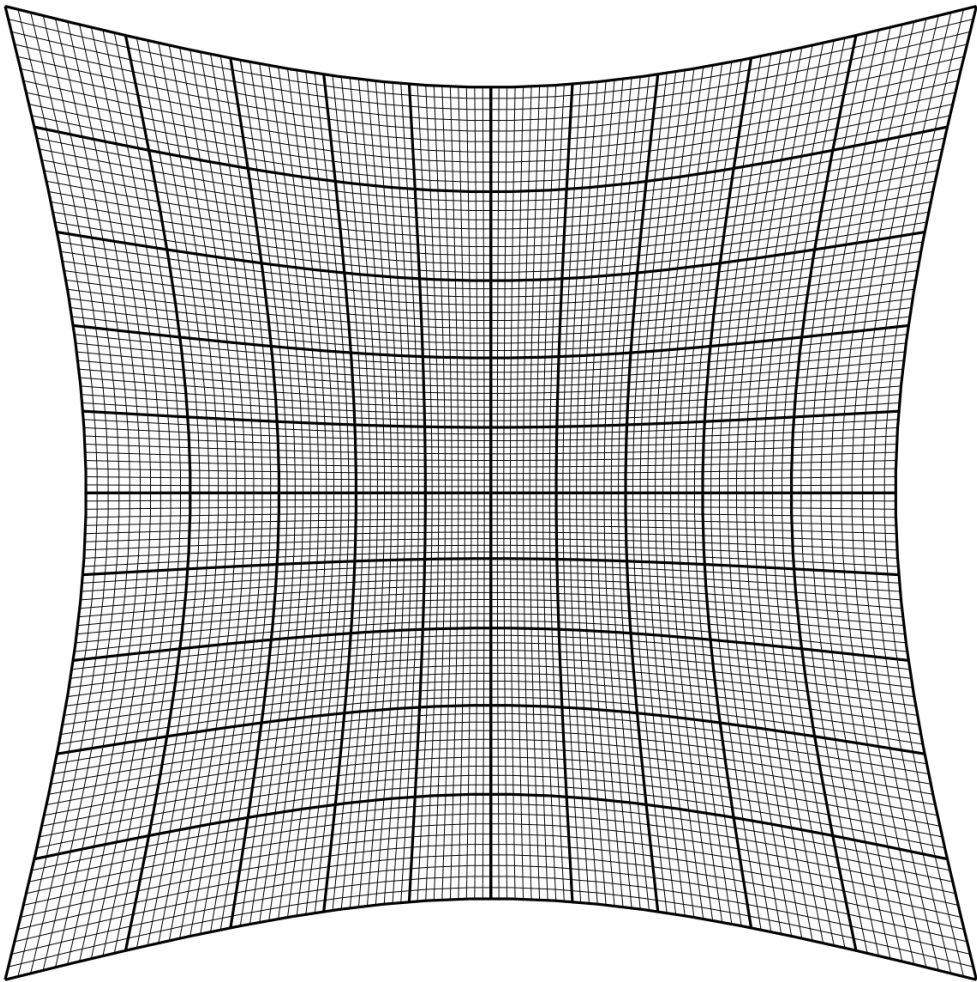
$$\alpha = \frac{l}{L}$$

C2 0.50

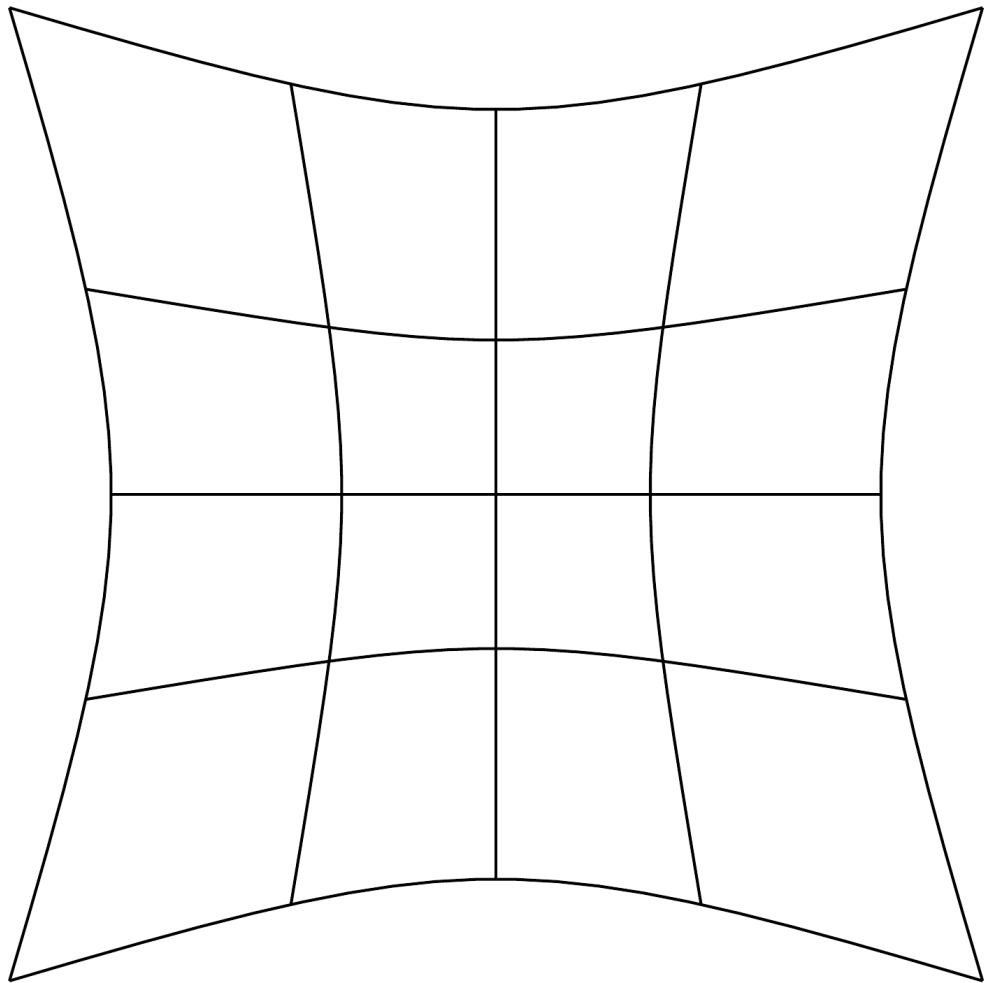
Нарисуйте качественный вид фотографии части тетрадного листа, изображённой на рисунке ниже, в случаях $\beta > 0$ (положительная дисторсия) и $\beta < 0$ (отрицательная дисторсия). Считайте, что $\alpha > 0$.



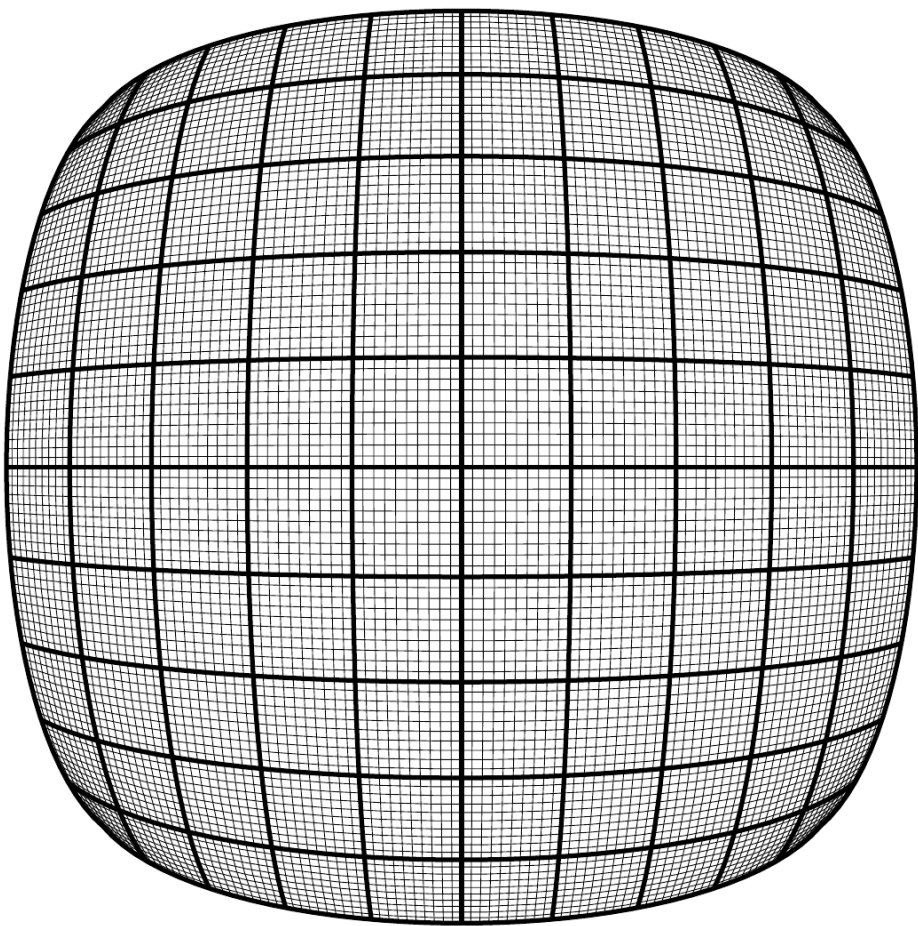
В случае $\beta > 0$ изображения миллиметровки (приведём его для более подробной иллюстрации) и квадрата будут иметь вид:



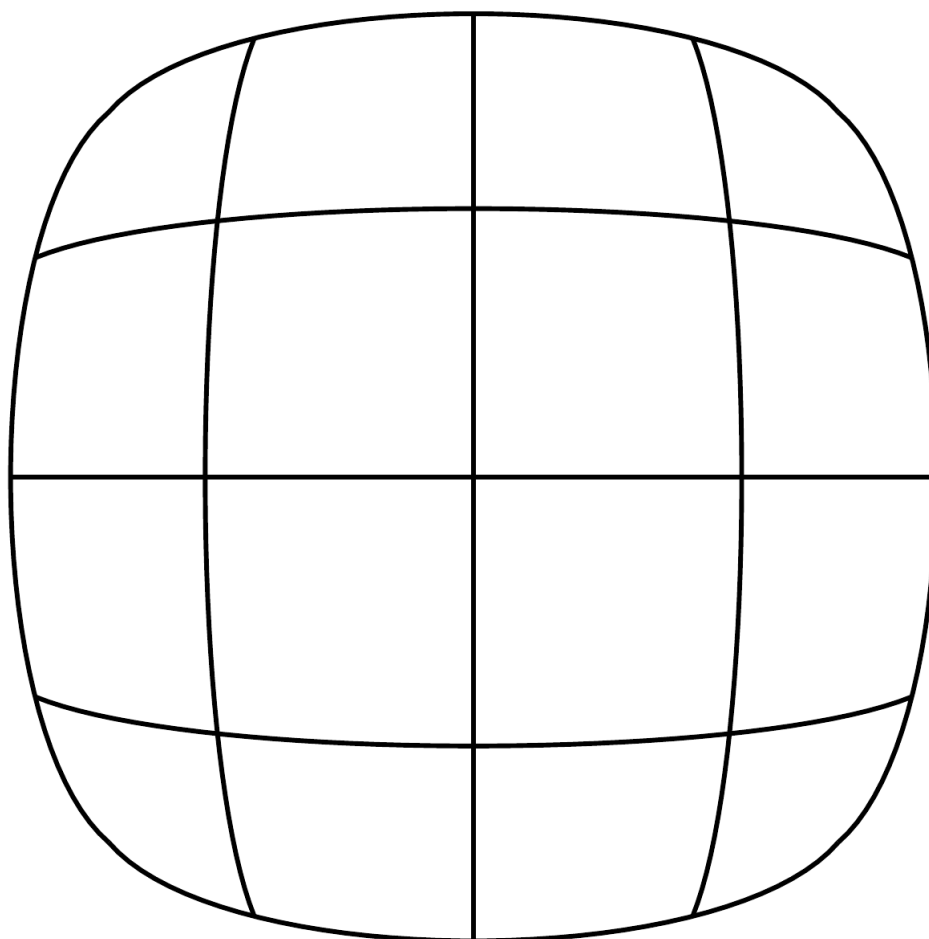
Ответ:



В случае $\beta < 0$:

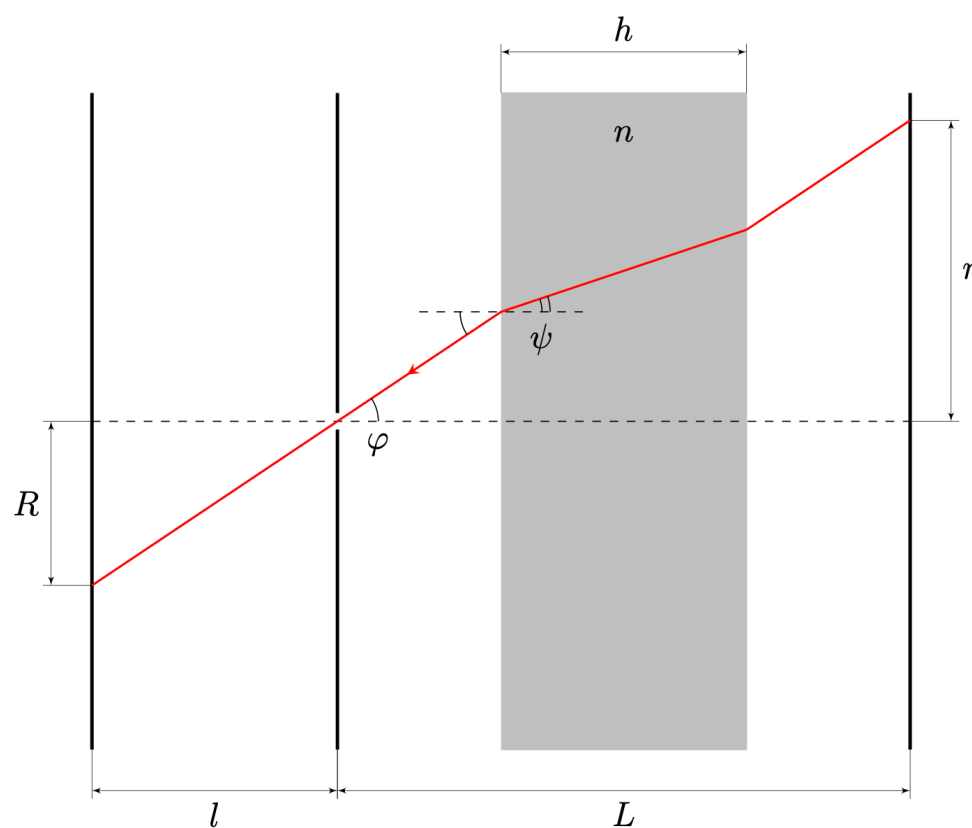


Ответ:



СЗ 2.00 Определите коэффициенты α и β в этом случае. Какая дисторсия наблюдается в такой системе: положительная (α и β одного знака) или отрицательная (α и β разных знаков)?

Заметим, что мы рассматриваем эффекты третьего порядка у параксиальных лучей, поэтому все формулы можно раскладывать до третьего порядка. Найдём связь R и r .



Выразим размеры через углы:

$$R = l \tan \varphi;$$

$$r = (L - h) \tan \varphi + h \tan \psi.$$

Связь углов:

$$n \sin \psi = \sin \varphi.$$

$$\psi = \arcsin\left(\frac{\sin \varphi}{n}\right) \approx \arcsin\left(\frac{\varphi}{n} - \frac{\varphi^3}{6n}\right) \approx \frac{\varphi}{n} - \frac{\varphi^3}{6n} + \frac{\varphi^3}{6n^3} = \frac{\varphi}{n} - \frac{\varphi^3(n^2 - 1)}{6n^3}$$

$$\tan \psi \approx \psi + \frac{\psi^3}{3} \approx \frac{\varphi}{n} - \frac{\varphi^3(n^2 - 1)}{6n^3} + \frac{\varphi^3}{3n^3} = \frac{\varphi}{n} - \frac{\varphi^3(n^2 - 3)}{6n^3}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{R}{l}\right) \approx \frac{R}{l} - \frac{R^3}{3l^3}$$

$$\tan \psi \approx \frac{R}{nl} - \frac{R^3}{3l^3n} - \frac{R^3(n^2-3)}{6l^3n^3} = \frac{R}{nl} - \frac{R^3(n^2-1)}{2l^3n^3}$$

$$r = \frac{L-h}{l}R + \frac{h}{nl}R - \frac{h(n^2-1)}{2l^3n^3}R^3 = \frac{nL-(n-1)h}{nl}R - \frac{h(n^2-1)}{2l^3n^3}R^3$$

Осталось выразить R . Введём обозначения:

$$A = \frac{nL-(n-1)h}{nl}; \qquad B = \frac{h(n^2-1)}{2l^3n^3}.$$

$$r = AR - BR^3$$

$$r \approx A(\alpha r + \beta r^3) - B\alpha^3r^3 = A\alpha r + (A\beta - B\alpha^3)r^3$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях и выразим искомые коэффициенты:

$$\begin{cases} A\alpha = 1; \\ A\beta - B\alpha^3 = 0. \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{A} = \frac{nl}{nL-(n-1)h}$$

$$\beta = \frac{B}{A^4} = \frac{hnl(n^2-1)}{2(nL-(n-1)h)^4}$$

Ответ: Наблюдается положительная дисторсия.

$$\alpha = \frac{nl}{nL-(n-1)h} \qquad \beta = \frac{hnl(n^2-1)}{2(nL-(n-1)h)^4}$$