

A10.20

Чему равны потоки магнитного поля через первичную и вторичную обмотки Φ_1 и Φ_2 ? Ответы выразите через Φ , N_1 и N_2 .

Ответ:

$$\Phi_1 = \Phi \cdot N_1, \quad \Phi_2 = -\Phi \cdot N_2$$

A20.20

С помощью теоремы о циркуляции для вектора напряжённости магнитного поля $\vec{H}$ найдите поток магнитного поля Φ в сердечнике. Ответ выразите через S , ℓ , μ , I_1 , I_2 , N_1 и N_2 .

Запишем теорему о циркуляции для всего трансформатора:

$$H \cdot l = N_1 I_1 - N_2 I_2,$$

Выразим поток магнитного поля:

Ответ:

$$\Phi = BS = \mu\mu_0 HS = \frac{\mu\mu_0 S}{l} (N_1 I_1 - N_2 I_2)$$

A30.30

Получите выражения для индуктивностей обмоток L_1 , L_2 и их коэффициента взаимной индукции M . Ответ выразите через S , ℓ , μ , I_1 , I_2 , N_1 и N_2 .

Ответ:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial I_1} = \frac{\mu\mu_0 S N_1^2}{l} \\ L_2 &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial I_2} = \frac{\mu\mu_0 S N_2^2}{l} \\ M &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial I_2} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial I_1} = -\frac{\mu\mu_0 S N_1 N_2}{l} \end{aligned}$$

A40.40

Найдите ЭДС магнитной индукции $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, возникающие в первичной и вторичной обмотках соответственно. Ответ выразите через $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, L_1 , L_2 и M .

Примечания:

- ЭДС $\mathcal{E}_1$ считается положительной, если электростатический потенциал в верхней точке a1 больше, чем в нижней a2.
- ЭДС $\mathcal{E}_2$ считается положительной, если электростатический потенциал в верхней точке b1 больше, чем в нижней b2.

Ответ:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \dot{\Phi}_1 = N_1 \dot{\Phi} = L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2 \\ \mathcal{E}_2 &= -\dot{\Phi}_2 = N_2 \dot{\Phi} = -L_2 \dot{I}_2 - M \dot{I}_1 \end{aligned}$$

A50.50

Получите выражение для коэффициента трансформации тока $k_I \equiv |\tilde{I}_1|/|\tilde{I}_2|$. В ответ могут входить L_1 , L_2 , ω и Z .

Используя уравнения из **A4** и следующие соотношения :

$$\begin{aligned} U_2 &= I_2 Z \\ M^2 &= L_1 L_2 \\ I_2 Z = \mathcal{E}_2 &= -L_2 \dot{I}_2 - M \dot{I}_1 \\ I_2 (Z - i\omega L_2) &= i\omega M I_1 \end{aligned}$$

получаем

Ответ:

$$k_I = \left| \frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_2} \right| = \left| \frac{Z - i\omega L_2}{i\omega M} \right| = \frac{\sqrt{(\operatorname{Re} Z)^2 + (\operatorname{Im} Z - \omega L_2)^2}}{\omega \sqrt{L_1 L_2}}$$

А6 0.50 Чему равен коэффициент трансформации напряжения $k_U = |\tilde{U}_2|/|\tilde{U}_1|$? В ответ могут входить L_1 , L_2 , ω и Z .

Записывая уравнения из прошлых пунктов:

$$\begin{aligned} U_2 &= -L_2 \dot{I}_2 - M \dot{I}_1 \\ U_2 &= I_2 \cdot Z \\ U_1 &= L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2 \end{aligned}$$

выражаем U_2 через U_1 :

$$\begin{aligned} U_2 &= i\omega L_2 \frac{U_2}{Z} + i\omega M I_1 \\ U_1 &= -i\omega L_1 I_1 - i\omega M \frac{U_2}{Z} \\ U_2 \left(1 - \frac{i\omega L_2}{Z} \right) &= \frac{M}{L_1} \left(U_1 - \frac{i\omega M}{Z} U_2 \right) \\ \frac{U_2}{U_1} &= \frac{\frac{M}{L_1}}{1 - \frac{i\omega L_2}{Z} + \frac{i\omega M^2}{Z L_1}} = \frac{M}{L_1} = -\frac{N_2}{N_1} \end{aligned}$$

получаем:

Ответ:

$$k_U = \left| -\frac{N_2}{N_1} \right| = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

А7 0.30 Запишите условие на количество витков в обмотках N_1 и N_2 , при котором выражение (1) выполняется.

Ответ:

$$N_2 \gg N_1$$

А8 0.60 Определите разность фаз $\Delta\varphi$, на которую напряжение U_1 опережает ток I_1 . В ответ могут входить L_1 , L_2 , ω и Z .

$$\begin{aligned} U_1 + \frac{i\omega M}{Z} \cdot U_2 &= -i\omega L_1 I_1 \\ U_1 \left(1 - \frac{i\omega M N_2}{Z N_1} \right) &= -i\omega L_1 I_1 \\ U_1 &= \frac{-i\omega L_1 Z N_1}{Z N_1 - i\omega M N_2} I_1 \end{aligned}$$

после преобразований:

Ответ:

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{|Z|^2 - \omega L_2 \cdot \operatorname{Im} Z}{\omega L_2 \operatorname{Re} Z}$$

Либо, что удобно для дальнейших вычислений,

$$\cos \Delta\varphi = \frac{\omega L_2 \operatorname{Re} Z}{|Z| \sqrt{(\operatorname{Re} Z)^2 + (\omega L_2 - \operatorname{Im} Z)^2}}$$

А9 0.60 Определите усредненную по времени мощность P источника U_1 . В ответ могут входить U_0 , Z , N_1 и N_2 .

Средняя мощность находится как:

$$P = \frac{1}{2} |I_1| |U_1| \cos \Delta\varphi$$

Подставляя получаем:

Ответ:

$$P = \frac{U_1^2 \operatorname{Re} Z}{2|Z|^2} \cdot \frac{N_2^2}{N_1^2}$$

Вычисления можно было существенно сократить используя следующую формулу для мощности:

$$P = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} I_1 U_1^* \right)$$

B1^{0.50}

Найдите отношение I/I_A .

Используя формулу для k_I получаем ответ:

Ответ:

$$\frac{I}{I_A} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = N$$

C1^{0.20}

Получите выражение для средней мощности P_0 , которая выделяется на нагрузке, если сопротивлением обмоток можно пренебречь. Ответ выразите через амплитуду входного напряжения U_0 и сопротивление нагрузки R . Вычислите её для трансформатора, параметры которого даны в задаче ранее.

Применяя формулу для средней мощности:

Ответ:

$$P_0 = \frac{U_0^2}{2R} = \frac{U_{\text{rms}}^2}{R} = 303 \text{ Вт}$$

C2^{0.30}

По аналогии с частью А запишите уравнения, связывающие комплексные амплитуды $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$, $\tilde{I}_1$ и $\tilde{I}_2$. В ответ также могут входить R , r , индуктивность одной обмотки L и циклическая частота ω .

Ответ:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= -i\omega L \tilde{I}_1 + i\omega L \tilde{I}_2 + r \tilde{I}_1 \\ \tilde{U}_2 &= (R + r) \tilde{I}_2 \\ \tilde{U}_2 &= i\omega L \tilde{I}_2 - i\omega L \tilde{I}_1 \end{aligned}$$

C3^{0.40}

Выразите $\tilde{I}_1$ и $\tilde{I}_2$ через $\tilde{U}_1$ и другие необходимые вам величины, в которые могут входить R , r , L и ω .

Выражаем:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2(R + r - i\omega L) &= -i\omega L \tilde{I}_1 \\ \tilde{U}_1 &= \left(-i\omega L + r + \frac{\omega^2 L^2}{R + r - i\omega L} \right) \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_1 &= \frac{(R + r - i\omega L) \tilde{U}_1}{(r - i\omega L)(R + r - i\omega L) + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

получаем:

Ответ:

$$\tilde{I}_1 = \frac{R + r - i\omega L}{r(R + r) - i\omega L(R + 2r)} \tilde{U}_1$$

$$\tilde{I}_2 = \frac{-i\omega L}{r(R+r) - i\omega L(R+2r)} \tilde{U}_1$$

С4 1.10 Здесь и далее работайте в пределе $r \ll R, \omega L$.

Получите выражения для мощности Джоулевых потерь P_{r1} и P_{r2} , выделяющихся в первичной и вторичной обмотках. Ответ выразите через амплитуду входного напряжения U_0 , а также r , ω и L .

Вычислите суммарную мощность Джоулевых потерь на обмотках $P_r = P_{r1} + P_{r2}$ для трансформатора, параметры которого даны ранее в задаче. Приведите в листах решений подробные выкладки для ваших расчётов.

Запишем мощность выделяющуюся на первой и второй обмотке:

$$P_{r1} = \frac{|\tilde{I}_1|^2 r}{2} = \frac{U_0^2 r}{2} \cdot \left| \frac{R+r-i\omega L}{r(R+r)-i\omega L(R+2r)} \right|^2$$
$$P_{r2} = \frac{|\tilde{I}_2|^2 r}{2} = \frac{U_0^2 r}{2} \cdot \left| \frac{-i\omega L}{r(R+r)-i\omega L(R+2r)} \right|^2$$

Считая, что $r \ll R, \omega L$ получаем:

Ответ:

$$P_{r1} = \frac{U_0^2 r}{2} \cdot \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 R^2}, \quad P_{r2} = \frac{U_0^2 r}{2R^2}$$

Тогда суммарная мощность потерь:

$$P_r = \frac{U_0^2 r}{2} \cdot \frac{R^2 + 2\omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 R^2}$$

Проведем расчеты:

$$U_0 = U_{\text{rms}} \cdot \sqrt{2} = 311 \text{ В}$$
$$\omega = 2\pi f = 314 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$
$$L = \frac{\mu\mu_0 S N^2}{l} = 0.503 \text{ Гн}$$

длина одного витка:

$$c = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 35.4 \text{ см}$$

Сопротивление обмотки:

$$r = \frac{1}{\sigma_{\text{w}}} \cdot \frac{Nc}{\frac{\pi d^2}{4}} = 2.16 \text{ Ом}$$

тогда

Ответ:

$$P_r = 12.4 \text{ Вт}$$

D1 0.30 Запишите выражение для тангенциального электрического поля $E(r, t)$.

Запишем поток магнитного поля через круг радиусом r :

$$\Phi = B\pi r^2$$

Закон электромагнитной индукции для круга радиусом r :

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi}$$
$$2\pi r E(r, t) = i\omega\pi r^2 B_0 e^{-i\omega t}$$

Ответ:

$$E(r, t) = \text{Re} \left(\frac{B_0 \omega r}{2} e^{\frac{i\pi}{2} - i\omega t} \right) = \frac{B_0 \omega r}{2} \sin \omega t$$

D2^{0.70} Получите выражение для средней мощности Джоулевых потерь P_{eddy} , выделяющихся в сердечнике. Выразите ответ через проводимость материала сердечника σ_c , площадь его поперечного сечения S , длину ℓ , а также B_0 и f .

Запишем мощность Джоулевых потерь в расчете на единицу объема:

$$p_{\text{eddy}}(r, t) = \sigma_c E^2 = \frac{\sigma_c B_0^2 \omega^2 r^2}{4} \sin^2 \omega t$$

усредняя по времени получим:

$$\overline{p_{\text{eddy}}} = \frac{\sigma_c B_0^2 \omega^2 r^2}{8}$$

Тогда средняя мощность выделяющаяся на всем сердечнике:

$$P_{\text{eddy}} = \frac{\sigma_c B_0^2 \omega^2 \ell}{8} \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{S}{\pi}}} 2\pi r^3 dr$$

вычисляя

Ответ:

$$P_{\text{eddy}} = \frac{\pi}{4} \cdot \sigma_c B_0^2 f^2 S^2 \ell$$

D3^{0.30} Найдите множитель A .

Запишем закон электромагнитной индукции для прямоугольника с размерами $2z \times 2x$:

$$E_x(z, t) \cdot 4x = -\dot{\Phi} = 2x \cdot 2z \cdot \text{Re} (i\omega B_0 e^{-i\omega t})$$
$$E_x(z, t) = \text{Re} (i\omega B_0 z e^{-i\omega t})$$

Ответ:

$$A = i\omega B_0$$

D4^{1.40} Запишите выражение для мощности dP/dV , выделяющейся в такой пластинке в расчёте на единицу объёма, усреднённой по всей высоте пластинки, а также по времени. В ответ могут входить S , ℓ , B_0 , h , σ_c и f .

Пусть теперь сердечник собран из пластин с параметрами, указанными выше в задаче. Ко вторичной обмотке всё ещё подключена нагрузка R . Выразите мощность P'_{eddy} , которая выделялась бы в сердечнике вследствие токов Фуко, через параметры, данные в задаче. Вычислите эту мощность.

Запишем выражение для мгновенной мощности в определенной точке в расчете на единицу площади:

$$\frac{dP}{dV}(z, t) = \sigma_c E^2(z, t) = \sigma_c \omega^2 B_0^2 z^2 \sin^2 \omega t$$

усредняя по времени получим:

$$\frac{dP}{dV}(z) = \frac{1}{2} \sigma_c \omega^2 B_0^2 z^2$$

теперь усредним по высоте z :

$$\frac{dP}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_c \omega^2 B_0^2 \cdot \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{1}{24} \sigma_c \omega^2 B_0^2 h^2$$

Ответ:

$$\frac{dP}{dV} = \frac{\pi^2}{6} \sigma_c B_0^2 f^2 h^2$$

Найдем выражение для мощности выделяемой на всем трансформаторе:

$$P'_{\text{eddy}} = \frac{dP}{dV} \cdot Sl = \frac{\pi^2}{6} \sigma_c B_0^2 f^2 h^2 Sl$$

можно заметить, что здесь мощность пропорциональна S , а не S^2 , (как это было в случае цельного сердечника), а значит мощность потерь будет значительно ниже.

Теперь найдем амплитуду магнитного поля B_0 . Используем уравнение для связи потока магнитного поля через сердечник и напряжения на обмотке из части А :

$$U_1 = N\dot{\Phi} = NS(-i\omega B)$$

$$B_0 = \frac{U_0}{2\pi fNS} = 0.99 \text{ Тл}$$

рассчитаем P'_{eddy} :

Ответ:

$$P'_{\text{eddy}} = 0.048 \text{ Вт}$$

E1^{0.40} Рассмотрим для простоты трансформатор без нагрузки. Запишите энергию, которую источник передаёт сердечнику, когда через первичную обмотку течёт ток I , а поток через сердечник меняется на $d\Phi$. Затем выразите эту энергию через H , dB и параметры сердечника.

Ответ:

$$dW = N \cdot I d\Phi = N \frac{Hl}{N} S dB = Sl \cdot H dB$$

E2^{0.30} Будем считать, что последнее выражение справедливо в произвольном случае. Запишите выражение для средней мощности P_{hyst} гистерезисных потерь. Ответ выразите через H_c , B_s и величины, данные в начале части C. Также получите численное значение.

За один период на графике $B(H)$ будет описана одна полная петля гистерезиса, а значит будет потеряно энергии

$$\Delta W = Sl \cdot \Delta H \Delta B = Sl \cdot 2H_c \cdot 2B_s = 4SlH_cB_s$$

Тогда средняя мощность энергии в следствии гистерезиса будет равна:

$$P_{\text{hyst}} = \frac{\Delta W}{T}$$

Ответ:

$$P_{\text{hyst}} = 4SlH_cB_sf = 15 \text{ Вт}$$

E3^{0.50} Считая все вклады, посчитанные в частях C, D и E, малыми и независимыми, вычислите итоговый КПД трансформатора η .

$$\eta = 1 - \frac{P_r + P_{\text{eddy}} + P_{\text{hyst}}}{P_0}$$

Ответ:

$$\eta = 91 \%$$