

Road to IPhO

Физика резки

Введение

В этой задаче рассматривается модель сил, действующих при резке, упрощенном двумерном процессе, при котором инструмент с прямым лезвием движется перпендикулярно к своему краю, удаляя слой материала постоянной толщины. На протяжении всей задачи считайте инструмент идеально острым. В задаче используются следующие физические величины:

- удельная работа отделения R (в Дж/м²) – работа на отделение единичной площади отреза от материала, например, при разрезе листа с площадью поперечного сечения S выделяется энергия $\Delta E = RS$ (см. рис.1).
- коэффициент трения μ между инструментом и материалом,

Эти характеристики материалов в процессе резки можно считать постоянными.

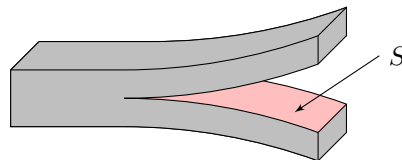


Рис.1. Разрез листа

Часть А. Резка мягких материалов (2.8 балла)

Разрезаемый образец с плоской гранью имеет ширину w . Наклонный клин с углом θ представляет собой острый режущий инструмент. На рис. 2 нижняя грань клина параллельна плоскости разреза и не касается поверхности реза. Таким образом, отрез соприкасается и скользит только по верхней грани.

Введём следующие обозначения сил (см. рис.2) :

- F_C – компонента силы, действующей на нож, уравнивающая силу взаимодействия со стружкой, параллельная плоскости движения ножа и действующая в направлении движения режущей кромки,
- F_T – компонента силы, действующей на нож, уравнивающая силу взаимодействия со стружкой, перпендикулярная поверхности реза и направленная от неё,
- N – нормальная сила реакции, действующая со стороны отреза на нож. Эта сила перпендикулярна верхней плоскости ножа

Рассмотрим резку очень гибкого, мягкого материала. В этой части предполагайте, что отрез не растягивается, а **работа, затрачиваемая на изгиб отреза, пренебрежимо мала, то есть работа, выполняемая режущим инструментом, расходуется только на создание новых поверхностей и преодоление трения. Нож взаимодействует с материалом только верхней наклоненной гранью.**

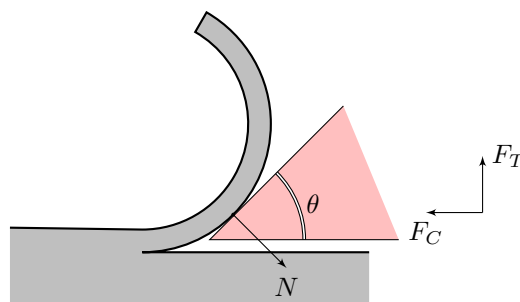


Рис.2

Road to IPhO

- A1** Записав закон сохранения энергии для системы, получите уравнение связи между θ , R , μ , w , F_C и N . **0.8**
- A2** Определите F_C . Ответ выразите через R , μ , θ , w . **0.8**
- A3** Постройте качественный график $F_C(\theta)$ при $\mu = 0.3$ в диапазоне $\theta \in [0; \pi/2]$. Укажите особые точки и их координаты. F_C выражайте в единицах wR . **1.0**
- A4** Определите F_C и F_T , пренебрегая трением. Ответы выразите через R , θ , w . **0.2**

Часть В. Косая резка мягких материалов (1.7 балла)

Если одновременно тянуть нож на себя (совмещать «толкание» и «сдвиг»), резка может стать значительно легче. Этот эффект описывается углом ψ между нормалью к лезвию и направлением движения. Нож движется со скоростью $v_\perp$ вдоль направления резки и со скоростью $v_\parallel$ вдоль линии разреза. В остальном продолжайте работать в модели части А.

- B1** Определите полную горизонтальную силу F , действующую на нож, пренебрегая трением. Ответ выразите через R , θ , w , ψ . **0.2**

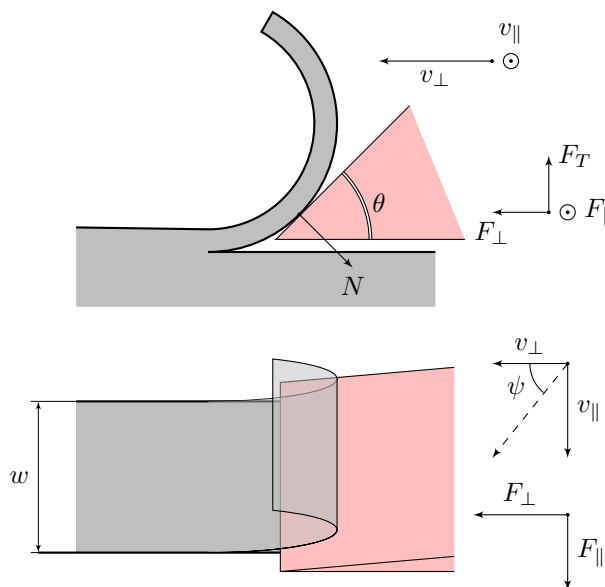


Рис.3

- B2** Определите полную горизонтальную силу F , действующую на нож со стороны стружки. Ответ выразите через R , w , ψ , θ , μ . **1.5**

Road to IPhO

Часть С. Образование стружки (3.9 балла)

При резке металлов в срезе происходят необратимые пластические деформации сдвига. В идеализированной модели деформация происходит в тонкой плоскости сдвига, наклоненной под углом φ к горизонту (см. рис. 5). Изображенный на рисунке элемент объема металла пересекает эту плоскость, необратимо деформируется и накапливает энергию. Его грани сдвигаются параллельно плоскости сдвига. На рис. 5 справа пунктиром изображена форма элемента до деформации, а голубой прямоугольник – он же после деформации. В системе отсчета клина слой деформированного металла движется по его поверхности с постоянной скоростью.

Верхняя плоскость клина образует угол α с нормалью к поверхности металла. Взаимодействие клина с металлом происходит только на верхней поверхности клина. Пусть t – толщина слоя, который деформируется в ходе разрезания, t_c – толщина слоя деформированного металла, который образуется на верхней поверхности клина.

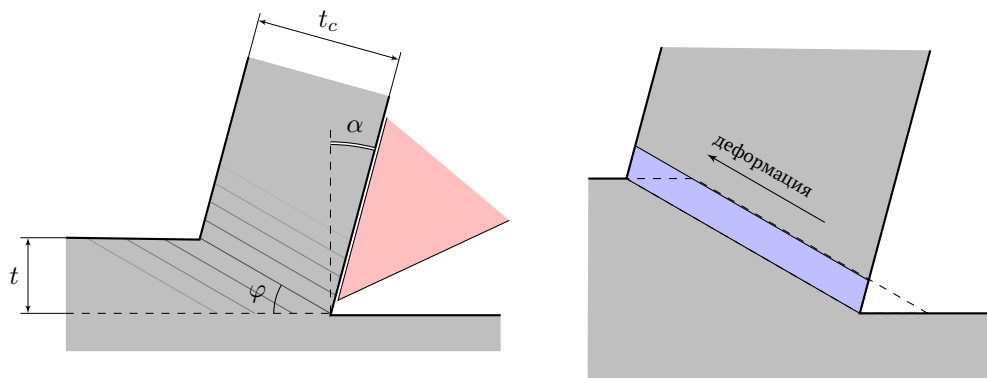


Рис.5

C1 Из геометрии определите t_c . Ответ выразите через t , углы φ и α .

0.3

C2 Найдите, при каком угле φ толщина стружки t_c равна t .

0.3

Необходимо учесть энергию сдвига. Для этого рассчитаем относительное смещение слоев. Введем параметр $\gamma = \frac{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}{|\vec{v}_1| \sin \varphi}$, где $\vec{v}_2$ – скорость слоя после прохождения ножа в системе отсчета ножа, $\vec{v}_1$ – скорость слоя до прохождения ножа в системе отсчета ножа.

C3 Определите γ . Ответ выразите через φ , α .

1.0

Энергия, необходимая для деформации сдвига, выражается как $d\Gamma = k\gamma w t dr$, где dr – горизонтальное смещение ножа, k – постоянная величина. Для удобства в следующем пункте можно ввести обозначение $\mu = \tan \beta$. Аналогично части А на нож действуют силы F_C и F_T .

C4 Определите F_C . Ответ выразите w , k , t , φ , α , β , R , γ .

1.2

Традиционно в теориях резки металлов значением удельной работы отделения R пренебрегают.

C5 Запишите выражение F_C для металлов. Ответ выразите w , k , t , φ , α и β .

0.1

Это соотношение было приведено Эрнстом и Мерчантом в 1944 г. Чтобы предсказать силы резки с помощью этого уравнения, необходимо знать μ , а также φ . Мерчант утверждал, что для заданного β угол φ будет саморегулироваться таким образом, чтобы минимизировать F_C .

C6 Вычислите значение угла φ , при котором сила F_C минимальна. Ответ выразите через β и α . Также определите силу F_C согласно теории Мерчанта. Ответ выразите через w , k , t , β и α .

1.0

Экспериментальные данные для металлов не до конца согласуются с теорией Мерчанта и различаются для разных металлов, хотя вид зависимости φ от $\beta - \alpha$ совпадает. Эту теорию позднее стали применять для других материалов, в частности полимеров и дерева.

Road to IPhO

Часть D. Разрезание напряжённого материала (1.6 балла)

Рассмотрим образец, растянутый перпендикулярно направлению разреза. При разрезании энергия деформации высвобождается и питает трещину, так что внешней работы, совершаемой лезвием, требуется меньше. Силы разрезания тем меньше, чем больше предварительное напряжение. Данный факт применяется, например, при резке резины. Лист длины L , толщины w и ширины $2t$, уже содержащий разрез длиной a , будет иметь треугольные недеформированные области вдоль разреза (рис. 6). При удлинении разреза на da недеформированные области растут и высвобождают упругую энергию деформации $d\Lambda$.

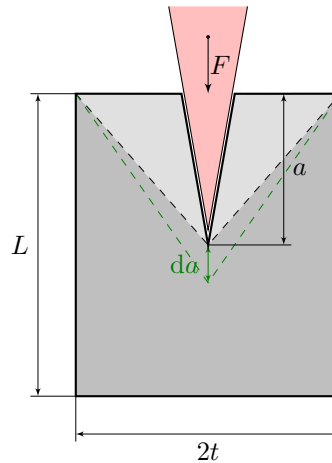


Рис.6

D1 Определите силу F , действующую на лезвие, при медленной резке. Ответ выразите через R , t , w , $d\Lambda/da$. **0.8**

Рассмотрим растянутый образец, упругое поведение которого при деформации подчиняется линейному соотношению $\sigma = E\varepsilon$, где E – модуль Юнга материала. Резка установилась и происходит квазистатически. Считайте, что напряжение нулевое внутри указанных треугольных областей и равно σ во всем остальном листе. Вершины треугольных областей всегда находятся в углах листа и в точке соприкосновения ножа и листа.

D2 При какой минимальной начальной деформации ε разрез может распространяться самопроизвольно, без затрачивания внешней работы? Ответ выразите через R , E и t . **0.8**