

Road to IPhO

Физика синхротрона (8 баллов)

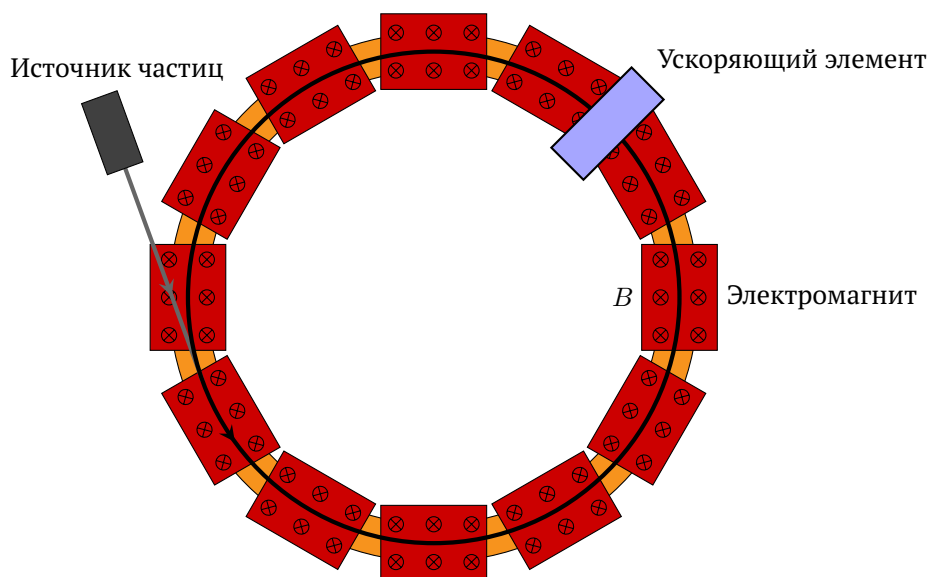
Синхротрон - циклический резонансный ускоритель как легких, так и тяжёлых частиц. В синхротроне орбита ускоряемых частиц остаётся постоянной, а магнитное поле изменяется с ростом энергии частиц, обеспечивая цикличность движения частиц (круговую или более сложную орбиту) и устойчивость движения с применением слабой или сильной фокусировки. Ускорение частиц осуществляется высокочастотным переменным электромагнитным полем, ускоряющие системы размещаются, как правило, в прямолинейных участках свободных от магнитного поля.

В данной задаче будут использованы следующие обозначения:

e	величина элементарного заряда
m_e	масса электрона
m_p	масса протона
v	скорость движения частицы
c	скорость света
γ	гамма-фактор частиц

Часть А. Равновесные частицы (1.4 балла)

Частицы попадают в цикл ускорения синхротрона, имея отличную от нуля энергию. Для первичного разгона используется линейный или другой циклический ускоритель. При этом начальная энергия обычно превышает несколько десятков МэВ, но при этом не больше 100 – 200 МэВ, поэтому движение электронов (энергия покоя 0.511 МэВ) изначально является сильно релятивистским, а протонов (энергия покоя 938 МэВ) – нерелятивистским. При этом синхротрон позволяет получать энергии в десятки ГэВ (то есть даже протоны становятся релятивистскими). В силу этого факта рассмотрим отдельно электронный и протонный синхротроны.



Электронный синхротрон Рассмотрим движение электрона по круговой орбите с радиусом R . По ходу работы ускорения период движения T практически не изменяется, так как скорость электрона всегда примерно равна скорости света. Величиной магнитного поля B управляют так, чтобы радиус орбиты электрона не менялся.

A1 Определите величину магнитного поля $B(t)$ электромагнитов в момент, когда энергия электронов $E(t)$. Выразите ответ через $E(t)$, T и физические постоянные. **0.5**

Road to IPhO

В ускоряющем элементе напряжение изменяется по гармоническому закону с частотой $\omega_U = n \cdot 2\pi/T$, где n – натуральное число. За один оборот частицы ее энергия изменяется на

$$\Delta E = T \frac{dE}{dt} = eU \cos \varphi,$$

где U – амплитуда напряжения на ускоряющем элементе, φ – фаза электромагнитного поля в момент, когда частица пролетает через ускоритель.

Равновесной называется такая частица, что фаза φ остается постоянной (за один оборот частицы она изменяется на $2\pi n$, что можно не учитывать, так как это не влияет на ускорение).

A2 Определите при каком соотношении на T , U и dB/dt существуют равновесные электроны.

0.4

Протонный синхротрон Основное отличие протонного синхротрона состоит в необходимости учёта роста скорости частиц. При этом частота резонаторов ускоряющих элементов должна меняться со временем. Рассмотрим движение протона по круговой орбите радиусом R . Частотой ускоряющего электромагнитного поля управляют так, что она всегда n раз больше угловой скорости протонов. Величиной магнитного поля B управляют так, чтобы радиус орбиты протона не менялся.

A3 Найдите зависимость частоты $\omega_U(t)$ от времени. Ответ выразите через $B(t)$, n , R и физические постоянные.

0.5

Часть В. Критическая энергия (2.5 балла)

Теперь рассмотрим поведение уже ускоренных по-разному неравновесных частиц между пролетами через ускоряющий элемент (магнитное поле не меняется во времени). Для таких частиц фаза φ является разной при каждом пролете (за один период она изменяется не кратно 2π). В ускорителях со сложной геометрией магнитное поле не является однородным, и траектория частиц может не быть окружностью.

Коэффициент расширения орбит α показывает, как меняется длина орбиты частицы L при изменении её импульса:

$$\alpha = \frac{p}{L} \frac{\partial L}{\partial p},$$

где L – длина орбиты (в случае движения по окружности $L = 2\pi R$). Из общих соображений понятно, что в ускорителе желательно иметь α как можно меньшей величины. Тогда орбита слабо реагирует на изменение импульса, то есть более устойчива.

Слабая фокусировка. При таком устройстве ускорителя поле электромагнитов однородно вдоль круговой орбиты равновесных и неравновесных частиц. При этом зависимость поля от радиуса орбиты имеет вид:

$$B(R) = \frac{\text{const}}{R^\xi},$$

где $0 < \xi < 1$.

B1 Получите значение α для случая слабой фокусировки.

0.5

Сильная фокусировка. При таком устройстве ускорителя используется система с неоднородным магнитным полем, позволяющая получить $\alpha \ll 1$.

Обозначим за $\omega = 2\pi/T$ циклическую частоту периодического движения частиц в ускорителе. Нас будет интересовать величина:

$$K = \frac{E}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial E},$$

которая показывает, как сильно отличаются циклическая частота движения частиц с близкой энергией.

B2 Выразите K через γ и α .

1.5

Критической энергией называется энергия частиц, при которой $K = 0$.

B3 Отметьте при какой фокусировке существует критическая энергия. Найдите γ у частиц с критической энергией.

0.5

Road to IPhO

Часть С. Фазовые колебания (4.1 балла)

Рассмотрим процесс ускорения неравновесных частиц. Обозначим ω_0 и ω — циклические частоты, φ_0 и φ — фазы ускоряющего элемента, E_0 и E — энергии равновесной и неравновесной частиц соответственно.

Частота ускоряющего электромагнитного поля равна $n\omega_0$ и равновесная фаза $\varphi_0 = \text{const}$. У неравновесных частиц фаза φ является разной при каждом пролете (за один период она изменяется не кратно 2π). Обозначим $\mathcal{E} = E - E_0$ отличие энергии неравновесной частицы от равновесной.

C1 Учитывая, что начальные энергии частиц отличаются слабо, выразите $\dot{\varphi}$ через $K, \mathcal{E}, n, \omega_0$ и E_0 . Изменение фазы φ на целое количество 2π не учитывайте. **0.9**

Изменение энергии частицы за один оборот равно $eU \cos \varphi$. Далее считайте, что изменения со временем K, E_0 и ω_0 малы и ими можно пренебречь при рассмотрении изменений $\mathcal{E}$ и φ .

C2 Выразите $\dot{\mathcal{E}}$ через $\varphi_0, \varphi, U, \omega_0$ и физические постоянные. Используйте тот факт, что отличие ω от ω_0 достаточно мало, чтобы им можно было пренебречь в данном случае. **0.3**

C3 Получите выражение для $\ddot{\varphi}$ через $K, E_0, \omega_0, U, \varphi_0, \varphi, n$ и физические постоянные. Определите, при каких φ_0 равновесная орбита устойчива (то есть изначально бесконечно малые отклонения φ не растут со временем). **0.6**

В начальный момент времени фаза некоторой частицы $\varphi = \varphi_i \in [-\pi, \pi]$, а ее отклонение энергии от равновесной $\mathcal{E} = \mathcal{E}_i$.

C4 Выразите $\dot{\varphi}^2$ через $K, E_0, \omega_0, U, \varphi_0, \varphi, n, \varphi_i$ и $\mathcal{E}_i$ и физические постоянные. **0.5**

C5 Определите, при каких значениях φ_i и $\mathcal{E}_i$ частица вовлекается в процесс ускорения, то есть в среднем она получает столько же энергии как и равновесная. Качественно изобразите границы найденной области плоскости $(\varphi_i, \mathcal{E}_i)$ для $\varphi_0 = 0$ (резонансное ускорение) и $\varphi = \pi/4$. **1.8**