

Road to IPhO

Волоконный акселерометр

Оптические схемы на основе оптоволокна позволяют изготавливать недорогие и при этом чувствительные сенсоры. В качестве примера рассмотрим волоконный акселерометр — прибор, измеряющий ускорение.

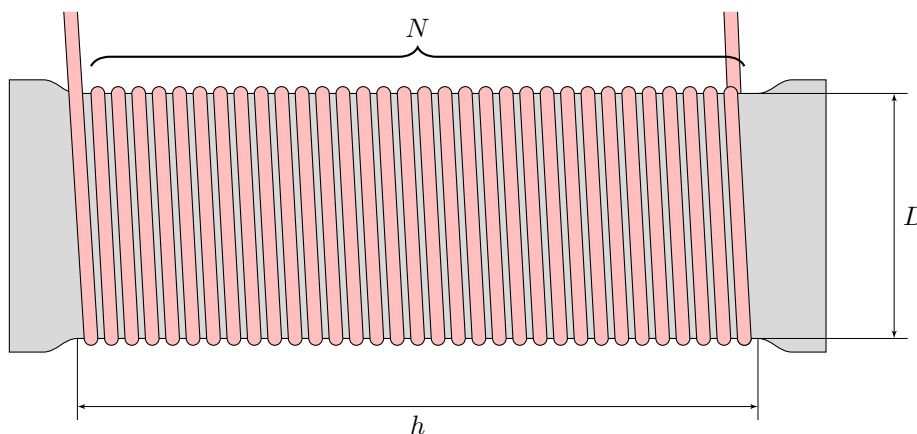
Постоянная Больцмана $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Часть А. Сейсмический сенсор (3.3 балла)

Вокруг резиновой опоры туго намотан жесткий провод диаметром $d = 80$ мкм и модулем Юнга $E = 74.0$ ГПа. Количество оборотов провода равно $N = 80$, высота области намотки $h = 2.00$ см, диаметр области намотки $D = 3.50$ см.

Силиконовая резина является таким материалом, форма которого чрезвычайно легко может меняться, но при этом ее объемная упругость очень велика. Поэтому объем резины внутри области намотки **не меняется**.

Допустим, высота области намотки изменилась и стала $h + \delta h$, $\delta h \ll h$, а диаметр $D + \delta D$.



A1 Выразите изменение диаметра области намотки δD через D , h и δh .

0.2

Из-за деформации резины длина провода стала $L + \delta L$.

A2 Изменение полной длины провода δL пропорционально δh

0.1

$$\delta L = \Lambda \delta h.$$

Выразите Λ через N , D , h . Количество оборотов N жестко зафиксировано.

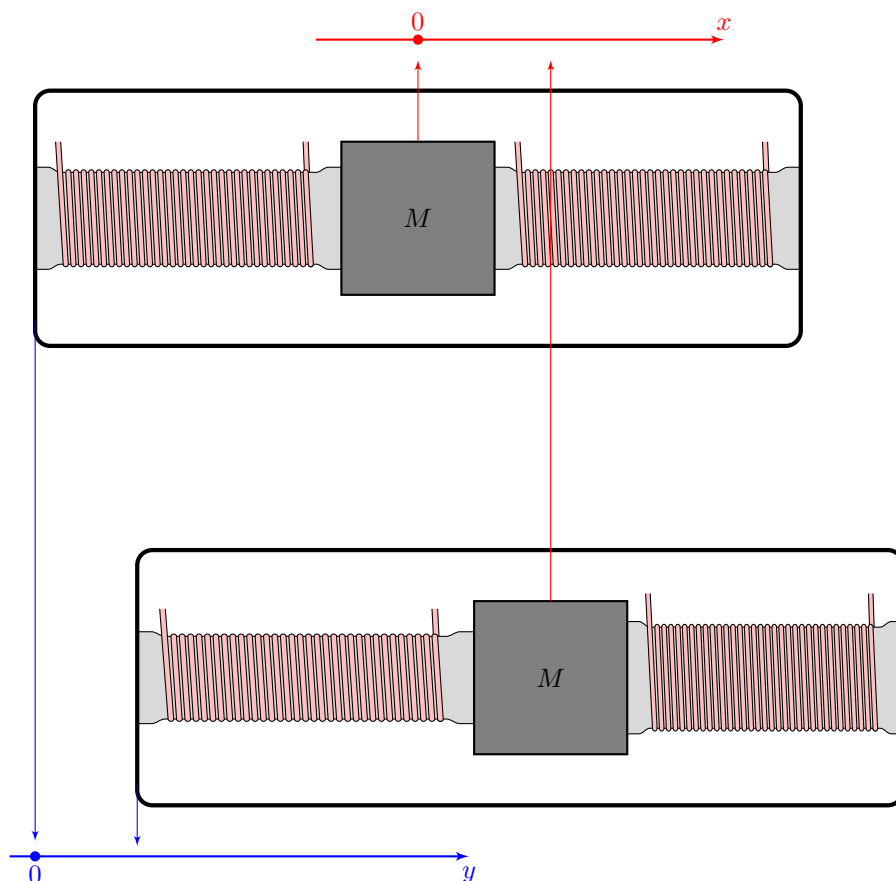
A3 Найдите энергию деформации провода W . Ответ выразите через N , D , h , d , E и δh

0.6

Рассмотрим груз массы $M = 540$ г, зажатый между двумя одинаковыми вертикальными опорами, рассмотренными ранее. Опоры жестко закреплены с недеформируемым корпусом сенсора.

Положение груза массы M в лабораторной системе отсчета (ЛСО) обозначим за x а положение корпуса сенсора в ЛСО обозначим за y . Равновесию соответствует $x = y = 0$.

Road to IPhO



A4 Пусть в некоторый момент времени корпус смещен ($y \neq 0$) и груз не находится в равновесии ($x \neq y$). **0.5**
Получите уравнение движения груза в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = Ay.$$

Выразите ω_0 и A через M, h, N, D, d и E .

В любой механической системе есть диссипации, поэтому уравнение движения груза, на самом деле, имеет вид

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = Ay,$$

где $\zeta \ll 1$ — коэффициент диссипации. Предположим, что корпус сенсора испытывает гармонические колебания $y = y_0 e^{i\omega t}$. Тогда груз тоже колеблется, $x = x_0 e^{i\omega t}$, а вместе с ним для левой опоры $\delta h = h_0 e^{i\omega t}$ и $\delta L = L_0 e^{i\omega t}$.

A5 Выразите L_0 через $y_0, \omega/\omega_0, \Lambda$ и ζ .

0.5

Для частот ω вдали от резонансной ω_0 сенсор работает либо в режиме сейсмографа: $y(t) = K_s \cdot \delta L(t)$, либо в режиме акселерометра: $\ddot{y}(t) = K_a \cdot \delta L(t)$, где $y(t)$ — суперпозиция нескольких низкочастотных или высокочастотных колебаний.

Пример низкочастотных колебаний:

$$y(t) = B_1 \sin(\omega_1 t) + B_2 \cos(\omega_2 t),$$

где $\omega_{1,2} \ll \omega_0$. Низкочастотная область характеризуется тем, что $\zeta \ll \omega_{1,2}/\omega_0$.

A6 Укажите соответствие между областями частот и режимами работы сенсора. Выразите K_s и K_a через M, h, N, D, d и E . **1.0**

A7 Вычислите значения K_a и ω_0 .

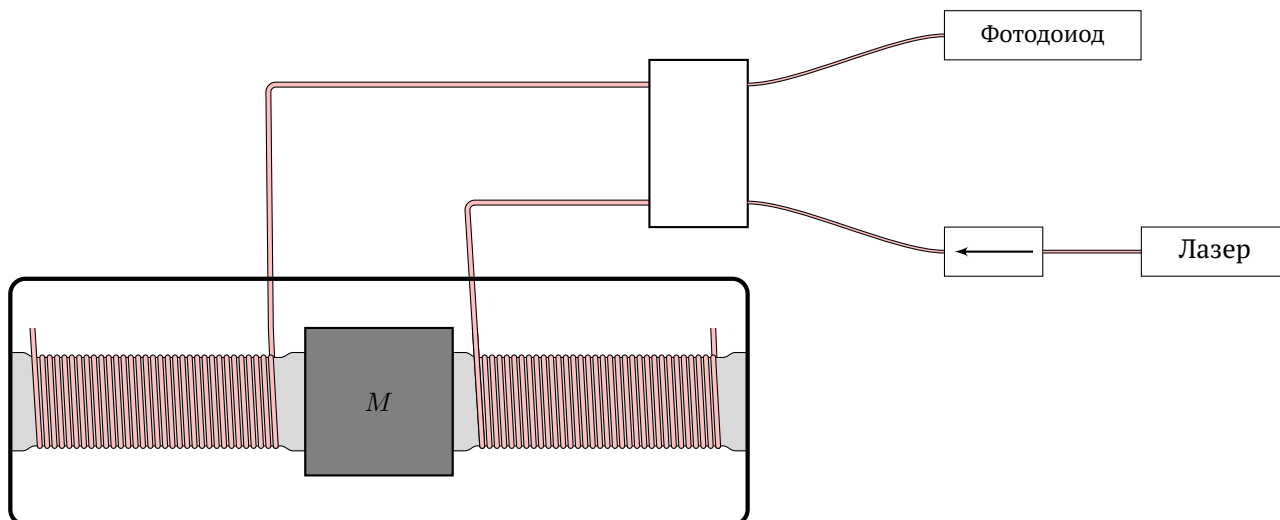
0.4

Road to IPhO

Часть В. Волоконный интерферометр (6.7 балла)

Если в качестве жесткого провода для сенсора, описанного в **части А**, использовать два отрезка оптоволоконка, то для измерения δL можно использовать изображенную ниже интерферометрическую схему. Показатель преломления сердцевины оптоволоконка $n = 1.47$.

В этой части продолжают использоваться обозначения и значения величин из **части А**.

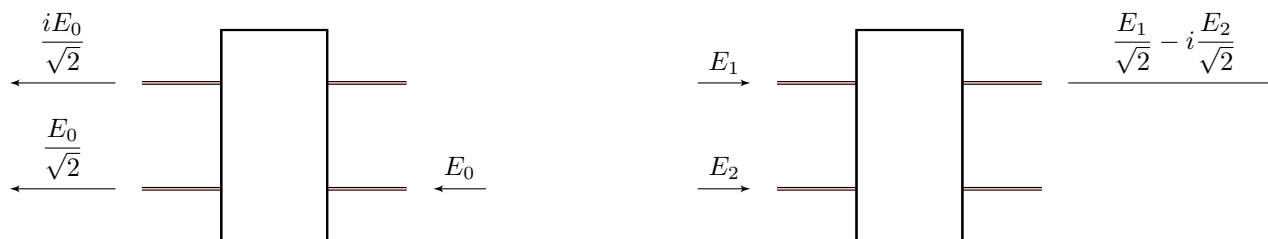


- В качестве источника света используется лазер интенсивностью I_0 с длиной волны $\lambda = 1.15$ мкм. Через изолятор (он пропускает свет только в одном направлении) свет идет в 2×2 разветвитель 50/50.
- Разделившись, свет попадает в пару отрезков оптоволоконка, намотанных на левую и правую опоры сенсора.
- На конце отрезков свет отражается от их края с амплитудным коэффициентом отражения r .
- После отражения от края волокон свет снова проходит через разветвитель и попадает на фотодиод, регистрирующий полезный сигнал.

Принцип работы разветвителя следующий: если со стороны лазера падает волна с комплексной амплитудой E_0 , то она выходит из обоих выходов с другой стороны с комплексными амплитудами $E_0/\sqrt{2}$ и $iE_0/\sqrt{2}$.

Если со стороны измерительной системы падают волны с комплексными амплитудами E_1 и E_2 , то со стороны фотодиода выходит волна с комплексной амплитудой $E_1/\sqrt{2} - iE_2/\sqrt{2}$.

Пусть сенсор оказался в таком состоянии, что правая опора сжата, а длина намотанного на нее волокна увеличена на δL .



В1 Выразите интенсивность света I , попадающего на фотодиод, через δL , I_0 , λ , n , r и φ_0 .

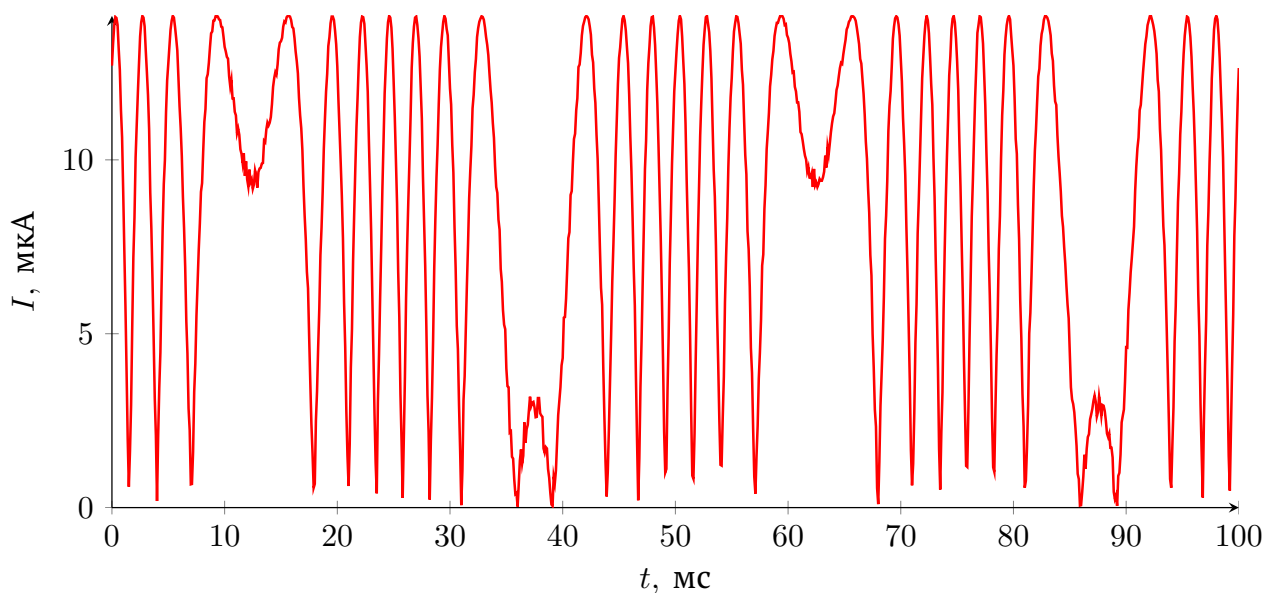
Здесь φ_0 — набегающая разность фаз между светом, проходящим сквозь волокно, намотанное на правую и левую опоры соответственно, при $\delta L = 0$.

Примечание. Можете не следить за знаком φ_0 . Иными словами, решения, отличающиеся заменой $\varphi_0 \rightarrow -\varphi_0$, считаются эквивалентными.

1.0

Road to IPhO

Сенсор тестируется для $y(t) = Y \sin(2\pi ft)$. Зависимость показаний силы тока через фотодиод от времени представлена на рисунке. **Сенсор работает в режиме акселерометра.**



B2 Определите численные значения Y и f .

1.5

Найдем **строгий теоретический предел** для минимальной величины ускорения, которое можно исследовать с помощью акселерометра при работе при комнатной температуре T .

B3 Пользуясь теоремой о равномерном распределении энергии по степеням свободы, запишите выражение для $\langle \delta L^2 \rangle$ — флуктуаций δL при комнатной температуре. Ответ выразите через постоянную Больцмана k_B , T , E , D , N и d . **0.3**

Кварц, из которого изготовлена сердцевина оптоволокна, имеет температурную дисперсию $\beta = dn/dT = 7.6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ и коэффициент температурного расширения $\alpha = dL/(L dT) = 0.54 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Разделим оптическое волокно длиной L на P небольших участков длины ΔL . При прохождении света через i -ый участок набежит фаза $\varphi_{i,0}$. При этом на всем волокне набежит фаза $\Phi_0 = \sum_i^P \varphi_{i,0}$.

B4 Если температура этого участка оптического волокна отличается от комнатной на малую величину ΔT_i , то при прохождении света через него набежит фаза $\varphi_i \neq \varphi_{i,0}$. Выразите $\Delta \varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i,0}$ через ΔT_i , ΔL_i , α , β , n и λ . **0.6**

Будем считать, что отличие температуры от комнатной ΔT_i является случайным, независимым (для $i \neq j$ выполняется, что $\langle \Delta T_i \Delta T_j \rangle = 0$). При этом оно является в среднем нулевым, $\langle \Delta T_i \rangle = 0$, и имеет одинаковую дисперсию $\langle \Delta T_i^2 \rangle = \langle \Delta T^2 \rangle$.

Суммарное изменение набега фазы, вызванное тепловыми флуктуациями, при прохождении (в одну сторону) через волокно длиной L равно $\Delta \Phi = \sum_{i=1}^P \Delta \varphi_i$.

B5 Выразите $\langle \Delta \Phi^2 \rangle$ через $\langle \Delta T^2 \rangle$, ΔL , L , n , α , β и λ .

0.7

Суммарное изменение набега фазы, вызванное тепловыми флуктуациями, при прохождении через волокно **туда-обратно** (с отражением от второго торца) обозначим за $\Delta \Psi$.

B6 Выразите $\langle \Delta \Psi^2 \rangle$ через $\langle \Delta \Phi^2 \rangle$.

1.0

Road to IPhO

B7 Найдите среднеквадратичную разность изменений набега фазы на двух плечах интерферометра **0.6**
 $\langle(\Delta\Psi_1 - \Delta\Psi_2)^2\rangle$. Ответ выразите через $\langle\Delta\Psi^2\rangle$.

Величину ΔL — длину участка, вдоль которого температура считается постоянной, будем считать равной 30.0 мкм.

B8 Считайте, что сенсор работает при $T = 305$ K, а величина температурных флуктуаций $\langle\Delta T^2\rangle$ составляет **1.0**
 $1.0 \cdot 10^{-6}$ K². Какое минимальное ускорение $a_{\min}$ возможно измерить с помощью предложенного сенсора?