

A1 0.80 Записав закон сохранения энергии для системы, получите уравнение связи между  $\theta$ ,  $R$ ,  $\mu$ ,  $w$ ,  $F_C$  и  $N$ .

Рассмотрим смещение ножа на  $dr$  по направлению резки. Отрез не растягивается, поэтому его относительное смещение по клину также равно  $dr$ . Запишем закон сохранения энергии для системы нож-обрез:

$$F_C dr = R w dr + \mu N dr$$

Отсюда получаем:

Ответ:

$$F_C = \mu N + R w$$

A2 0.80 Определите  $F_C$ . Ответ выразите через  $R$ ,  $\mu$ ,  $\theta$ ,  $w$ .

Запишем второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную ось:

$$F_C = \mu N \cos \theta + N \sin \theta$$

Комбинируя это выражение с результатом предыдущего пункта, получаем:

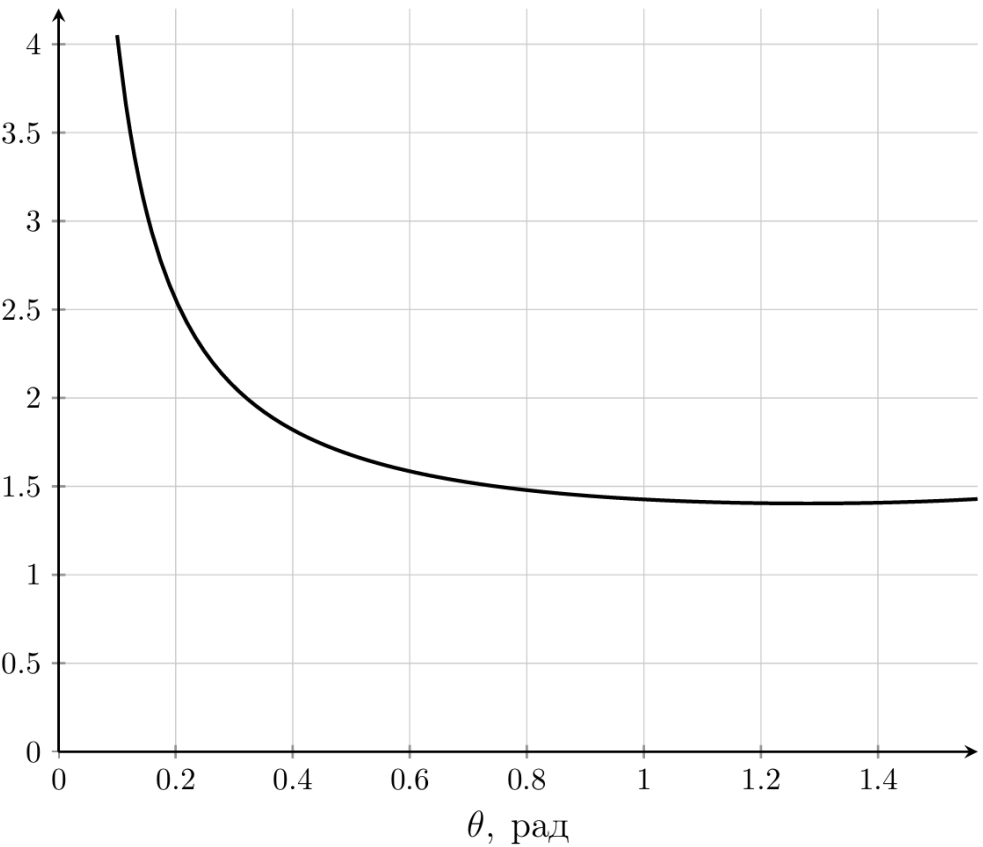
Ответ:

$$F_C = \frac{R w}{1 - \frac{\mu}{\mu \cos \theta + \sin \theta}}$$

A3 1.00 Постройте качественный график  $F_C(\theta)$  при  $\mu = 0.3$  в диапазоне  $\theta \in [0; \pi/2]$ . Укажите особые точки и их координаты.  $F_C$  выражайте в единицах  $wR$ .

Построим график:

Ответ:



Эта зависимость имеет экстремум:

$$\cos \theta - \mu \sin \theta = 0, \quad \theta = \arctg \frac{1}{\mu} \approx 73^\circ$$

Минимальное значение силы  $F_C$  выражается как:

$$F_C = \frac{R w}{1 - \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}} \approx 1.40 R w$$

A4 0.20 Определите  $F_C$  и  $F_T$ , пренебрегая трением. Ответы выразите через  $R$ ,  $\theta$ ,  $w$ .

Упрощая ответ из **A2**, получаем:

Ответ:

$$F_C = R w$$

В отсутствие трения суммарная сила, действующая на клин, направлена под углом  $\theta$  к вертикали, поэтому:

Ответ:

$$F_T = R w \operatorname{ctg} \theta$$

**B1** <sup>0.20</sup>

Определите полную горизонтальную силу  $F$ , действующую на нож, пренебрегая трением. Ответ выразите через  $R, \theta, w, \psi$ .

Для смещения параллельно линии реза не нужно прикладывать усилие, поэтому:

Ответ:

$$F = R w$$

**B2** <sup>1.50</sup>

Определите полную горизонтальную силу  $F$ , действующую на нож со стороны стружки. Ответ выразите через  $R, w, \psi, \theta, \mu$ .

Введем проекции  $F_{\parallel}$  и  $F_{\perp}$ . По закону Кулона-Амонтона сила трения, действующая на стружку, равна  $\mu N$  по модулю и направлена против скорости движения стружки относительно клина.

Запишем второй закон Ньютона:

$$F_{\perp} = N(\sin \theta + \mu \cos \theta \cos \psi)$$

В проекции на перпендикулярную горизонтальную ось условие равновесия следующее:

$$F_{\parallel} = \mu N \sin \psi$$

Запишем ЗСЭ, для этого приравняем мощность силы  $F$  к мощности потерь энергии в системе на трение:

$$\mu N v + R w v \cos \psi = F_{\perp} v \cos \psi + F_{\parallel} v \sin \psi$$

Выразим  $N$ , комбинируя результаты:

$$N = \frac{R w}{(\sin \theta + \mu \cos \theta \cos \psi) - \mu \cos \psi}$$

Выразим  $F$  как  $F = \sqrt{F_{\parallel}^2 + F_{\perp}^2}$ :

Ответ:

$$F = \frac{R w}{(\sin \theta + \mu \cos \theta \cos \psi) - \mu \cos \psi} \sqrt{\mu^2 \sin^2 \psi + (\sin \theta + \mu \cos \theta \cos \psi)^2}$$

**C1** <sup>0.30</sup>

Из геометрии определите  $t_c$ . Ответ выразите через  $t$ , углы  $\varphi$  и  $\alpha$ .

Длина стружки остается постоянной, отсюда:

$$\frac{t}{\sin \varphi} = \frac{t_c}{\cos(\varphi - \alpha)}$$

Выразим  $t_c$ :

Ответ:

$$t_c = t \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi}$$

**C2** <sup>0.30</sup>

Найдите, при каком угле  $\varphi$  толщина стружки  $t_c$  равна  $t$ .

Приравняем синусы углов:

$$\sin \varphi = \cos(\varphi - \alpha) = \sin(\pi/2 - \varphi + \alpha)$$

Отсюда:

Ответ:

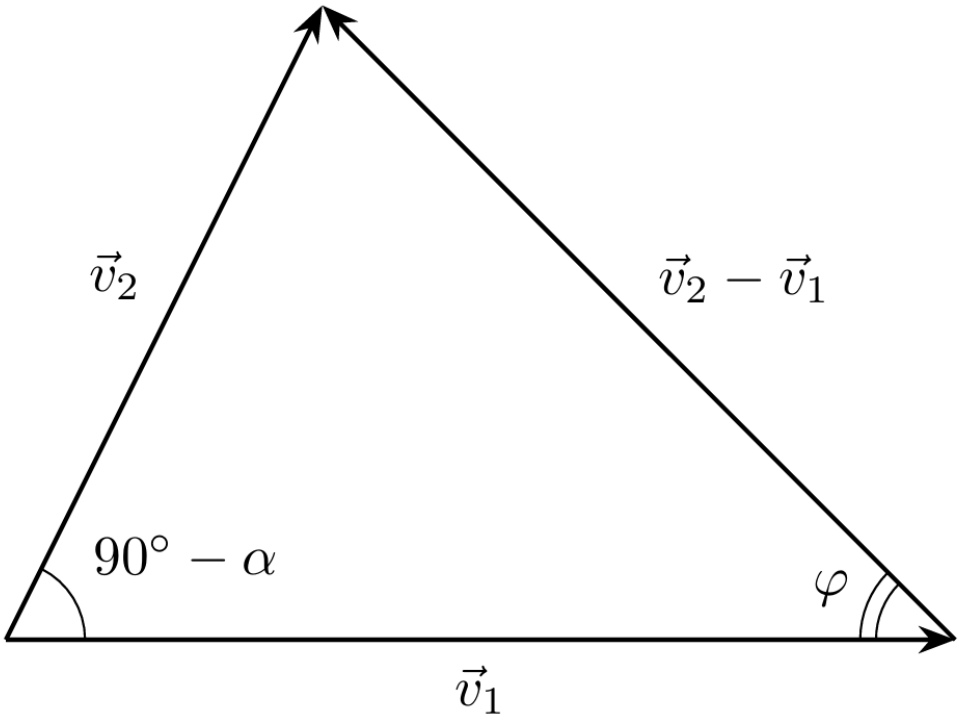
$$\varphi = \pi/4 + \alpha/2$$

СЗ 1.00

Определите  $\gamma$ . Ответ выразите через  $\varphi, \alpha$ .

Первое решение

Рассмотрим треугольник скоростей:



Отсюда по теореме синусов:

$$\frac{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}{|\vec{v}_1|} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\varphi - \alpha)}$$

Выразим ответ:

Ответ:

$$\gamma = \frac{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}{|\vec{v}_1|} = \frac{\cos \alpha}{\cos(\varphi - \alpha) \sin \varphi}$$

Второе решение

Из уравнения несжимаемости металла:

$$v_1 t = v_2 t_c$$

Выразим ответ:

$$\gamma = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\sin \varphi}{\cos(\varphi - \alpha)}\right)^2 - 2\frac{\sin \varphi}{\cos(\varphi - \alpha)}\sin \alpha}}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi \cos^2 \alpha + \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha + 2 \sin \varphi \sin \alpha \cos \varphi \cos \alpha + \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \sin \alpha \cos \varphi \cos \alpha - 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha}}{\sin \varphi \cos(\varphi - \alpha)}$$

Путем несложных преобразований ответ упрощается до:

$$\gamma = \frac{\cos \alpha}{\cos(\varphi - \alpha) \sin \varphi}$$

Ответ:

$$\gamma = \frac{\cos \alpha}{\cos(\varphi - \alpha) \sin \varphi}$$

С4 1.20

Определите  $F_C$ . Ответ выразите  $w, k, t, \varphi, \alpha, \beta, R, \gamma$ .

Свяжем силу трения, действующую на отрез, с  $F_C$ , для этого запишем равенство горизонтальных сил, действующих на клин:

$$F_C = N(\mu \sin \alpha + \cos \alpha)$$

Выразим силу трения  $F_t$ :

$$F_t = \mu N = \frac{\mu F_C}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{F_C \sin \beta}{\cos(\beta - \alpha)}$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$F_C dr = R w dr + F_t dr \frac{|v_2|}{|v_1|} + k \gamma w t dr$$

Из теоремы синусов:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \varphi}{\cos(\varphi - \alpha)}$$

Комбинируя результаты, получаем:

Ответ:

$$F_C = \frac{w(k\gamma t + R)}{1 - \frac{\sin \beta \sin \varphi}{\cos(\varphi - \alpha) \cos(\beta - \alpha)}}$$

C5<sup>0.10</sup>

Запишите выражение  $F_C$  для металлов. Ответ выразите  $w, k, t, \varphi, \alpha$  и  $\beta$ .

Подставим значение  $\gamma$  и пренебрежем  $R$ :

Ответ:

$$F_C = \frac{w k t \cos \alpha \cos(\beta - \alpha)}{\sin \varphi (\cos(\varphi - \alpha) \cos(\beta - \alpha) - \sin \beta \sin \varphi)}$$

C6<sup>1.00</sup>

Вычислите значение угла  $\varphi$ , при котором сила  $F_C$  минимальна. Ответ выразите через  $\beta$  и  $\alpha$ . Также определите силу  $F_C$  согласно теории Мерчанта. Ответ выразите через  $w, k, t, \beta$  и  $\alpha$ .

Найдем максимум знаменателя. Для этого приравняем к нулю производную знаменателя:

$$\cos \varphi \cos(\varphi - \alpha) - \sin \varphi \sin(\varphi - \alpha) - \frac{2 \sin \beta \sin \varphi \cos \varphi}{\cos(\beta - \alpha)} = 0$$

Отсюда:

$$\cos(2\varphi - \alpha) \cos(\beta - \alpha) = \sin 2\varphi \sin \beta$$

Преобразуем полученные выражения по формулам полусуммы и полуразности косинусов:

$$\frac{\cos(2\varphi + \beta - 2\alpha) + \cos(2\varphi - \beta)}{2} = \frac{\cos(2\varphi - \beta) - \cos(2\varphi + \beta)}{2}$$

Отсюда получим уравнение:

$$\pi - 2\varphi - \beta = 2\varphi + \beta - 2\alpha$$

Оптимальный угол:

Ответ:

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Подставим значение  $\varphi$  и определим минимально возможную силу:

Ответ:

$$F_C = \frac{w k t \cos \alpha \cos(\beta - \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos(\beta - \alpha) - \sin \beta \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right)}$$

D1<sup>0.80</sup>

Определите силу  $F$ , действующую на лезвие, при медленной резке. Ответ выразите через  $R, t, w, d\Lambda/da$ .

Запишем закон сохранения энергии:

$$Fda = Rwd a - d\Lambda$$

Отсюда:

Ответ:

$$F=Rw-d\Lambda/da$$

**D2** <sup>0.80</sup> При какой минимальной начальной деформации  $\epsilon$  разрез может распространяться самопроизвольно, без затрачивания внешней работы? Ответ выразите через  $R$ ,  $E$  и  $t$ .

Самопроизвольное распространение разреза возможно при  $F \leq 0$ .  
Тогда:

$$Rw-d\Lambda/da \leq 0$$

Поверхностная плотность энергии материала:

$$d\Lambda/dS = \frac{1}{2}E\epsilon^2 w$$

Выразим площадь свободной треугольной области:

$$S = ta$$

Отсюда:

$$d\Lambda/da = \frac{1}{2}E\epsilon^2 wt$$

Тогда:

Ответ:

$$\epsilon_{\min} = \sqrt{\frac{2R}{Et}}$$