

A1 ^{0.50} Определите величину магнитного поля $B(t)$ электромагнитов в момент, когда энергия электронов $E(t)$. Выразите ответ через $E(t)$, T и физические постоянные.

Запишем второй закон Ньютона:

$$evB = p \frac{2\pi}{T}.$$
$$B = \frac{2\pi}{eT} \cdot \frac{p}{v} = \frac{2\pi}{eT} \cdot \gamma m = \frac{2\pi}{eT} \cdot \frac{E}{c^2}$$

Ответ:

$$B(t) = \frac{2\pi E(t)}{eTc^2}$$

A2 ^{0.40} Определите при каком соотношении на T , U и dB/dt существуют равновесные электроны.

Выразим энергию из результата прошлого пункта и продифференцируем с учётом того, что $T = \text{const}$.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{eTc^2}{2\pi} \cdot \frac{dB}{dt} = \frac{eU}{T} \cos \varphi$$
$$\cos \varphi = \frac{T^2 c^2}{2\pi U} \cdot \frac{dB}{dt}$$

Косинус не превышает 1, что даёт условие на допустимые параметры синхротрона.

Ответ:

$$\frac{T^2 c^2}{2\pi U} \cdot \frac{dB}{dt} \leq 1$$

A3 ^{0.50} Найдите зависимость частоты $\omega_U(t)$ от времени. Ответ выразите через $B(t)$, n , R и физические постоянные.

Второй закон Ньютона аналогичен прошлым пунктам:

$$evB = p \frac{2\pi}{T} = \frac{p\omega_U}{n}.$$

Выразим p и E :

$$p = eB \frac{vT}{2\pi} = eBR.$$
$$E = \sqrt{(m_p c^2)^2 + (pc)^2} = \sqrt{(m_p c^2)^2 + (ceBR)^2}$$

Связь E и B можно получить и аналогично прошлому пункту:

$$eB = \frac{p\omega_U}{vn} = \frac{E\omega_U}{c^2 n}.$$
$$\omega_U(t) = \frac{nec^2 B}{E}$$

Осталось только подставить значение энергии.

Ответ:

$$\omega_U(t) = \frac{nec^2 B(t)}{\sqrt{(m_p c^2)^2 + (ceB(t)R)^2}}$$

B1 ^{0.50} Получите значение α для случая слабой фокусировки.

Аналогично прошлому пункту выражение для импульса на круговой орбите радиусом R :

$$p(R) = eB(R)R = \text{const} \cdot R^{1-\xi}.$$

Тогда связь на относительные изменения:

$$\frac{dp}{p} = (1-\xi) \frac{dR}{R} = (1-\xi) \frac{dL}{L}.$$

Ответ:

$$\alpha = \frac{1}{1 - \xi}$$

B2 1.50 Выразите K через γ и α .

Воспользуемся выражением для циклической частоты:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi v}{L}. \\ \frac{d\omega}{\omega} &= \frac{dv}{v} - \frac{dL}{L} = \frac{dv}{v} - \alpha \frac{dp}{p} \\ K &= \frac{E}{v} \frac{dv}{dE} - \alpha \frac{E}{p} \frac{dp}{dE}\end{aligned}$$

Найдём производные и подставим.

$$\begin{aligned}\frac{vdE}{Edv} &= \frac{vd\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}{dv/\sqrt{1-v^2/c^2}} = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{d\sqrt{1-v^2/c^2}}{dv} = \frac{v^2}{c^2 - v^2} = \beta^2 \gamma^2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \gamma^2 = \gamma^2 - 1 \\ \frac{p}{E} \frac{dE}{dp} &= \frac{p}{\sqrt{(mc)^2 + p^2}} \frac{d\sqrt{(mc)^2 + p^2}}{dp} = \frac{p^2}{(mc)^2 + p^2} = 1 - \frac{(mc^2)^2}{E^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\end{aligned}$$

Ответ:

$$K = \frac{1 - \alpha \gamma^2}{\gamma^2 - 1}$$

B3 0.50 Отметьте при какой фокусировке существует критическая энергия. Найдите γ у частиц с критической энергией.

Для критической ситуации имеем:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

$\gamma > 1$, поэтому для существования критической энергии необходимо $\alpha < 1$. Для слабой фокусировки это условие не выполнено.

Ответ: Критическая энергия существует только для сильной фокусировки.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

C1 0.90 Учитывая, что начальные энергии частиц отличаются слабо, выразите $\dot{\varphi}$ через K , $\mathcal{E}$, n , ω_0 и E_0 .

Рассмотрим изменяется фаза частицы в отличие от равновесной за один оборот:

$$\Delta\varphi = \omega_U \left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{2\pi}{\omega_0} \right).$$

Поделим на время этого изменения, то есть период обращения частицы равный $2\pi/\omega$.

$$\dot{\varphi} = \omega_U \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right) = n(\omega_0 - \omega)$$

Воспользуемся определением K и получим:

$$\omega - \omega_0 = K \frac{\omega_0}{E_0} \mathcal{E}.$$

Ответ:

$$\dot{\varphi} = -\frac{nK\omega_0}{E_0} \mathcal{E}$$

C2 0.30 Выразите $\dot{\mathcal{E}}$ через φ_0 , φ , U , ω_0 и физические постоянные. Используйте тот факт, что отличие ω от ω_0 достаточно мало, чтобы им можно было пренебречь в данном случае.

Запишем производные E и E_0 .

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{\omega}{2\pi} eU \cos \varphi \approx \frac{\omega_0}{2\pi} eU \cos \varphi \\ \dot{E}_0 &= \frac{\omega_0}{2\pi} eU \cos \varphi_0\end{aligned}$$

Ответ:

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{\omega_0 eU}{2\pi} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

C3 0.60 Получите выражение для $\ddot{\varphi}$ через K , E_0 , ω_0 , U , φ_0 , φ , n и физические постоянные. Определите, при каких φ_0 равновесная орбита устойчива (то есть изначально бесконечно малые отклонения φ не растут со временем).

Продифференцируем $\dot{\varphi}$ с учётом указанных приближений.

$$\ddot{\varphi} = -\frac{nK\omega_0}{E_0} \dot{\mathcal{E}}$$

Ответ:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{nK\omega_0^2 eU}{2\pi E_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

Для устойчивости разложим до первого порядка:

$$\ddot{\varphi} = \frac{nK\omega_0^2 eU}{2\pi E_0} \sin \varphi_0 (\varphi - \varphi_0).$$

Ответ: Устойчивость при $K \sin \varphi_0 < 0$

C4 0.50 Выразите $\dot{\varphi}^2$ через K , E_0 , ω_0 , U , φ_0 , φ , n , φ_i и $\mathcal{E}_i$ и физические постоянные.

Воспользуемся результатом прошлого пункта.

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}^2}{2d\varphi} \\ d\dot{\varphi}^2 &= -\frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi \\ \dot{\varphi}^2 + \frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_0) &= \text{const}\end{aligned}$$

Осталось подставить начальные значения.

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{nK\omega_0}{E_0} \mathcal{E}_i$$

Ответ:

$$\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{nK\omega_0}{E_0} \mathcal{E}_i \right)^2 + \frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin \varphi_i - \varphi_i \cos \varphi_0) - \frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_0)$$

C5 1.80 Определите, при каких значениях φ_i и $\mathcal{E}_i$ частица вовлекается в процесс ускорения, то есть в среднем она получает столько же энергии как и равновесная.

Качественно изобразите границы найденной области плоскости $(\varphi_i, \mathcal{E}_i)$ для $\varphi_0 = 0$ (резонансное ускорение) и $\varphi = \pi/4$.

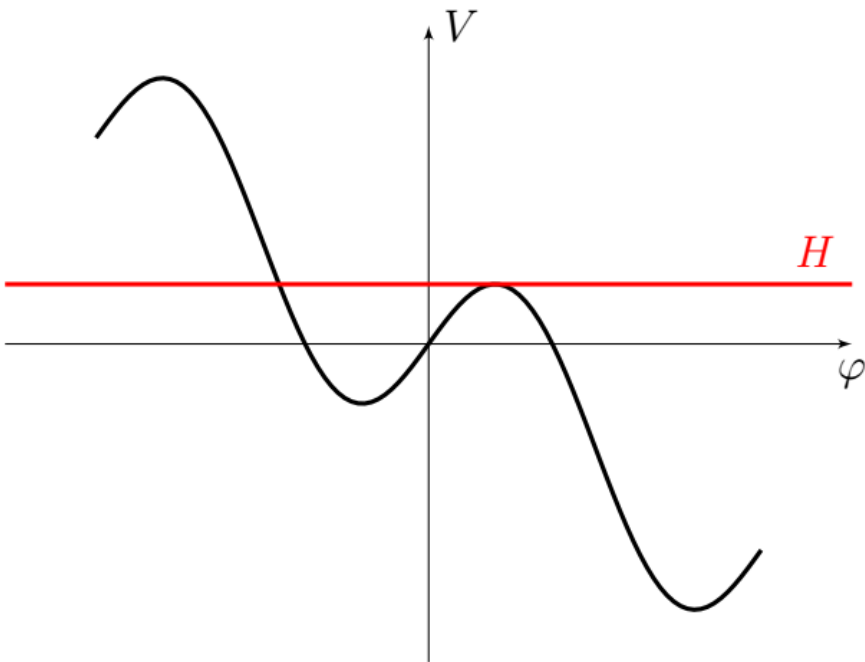
Воспользуемся результатом прошлого пункта:

$$\dot{\varphi}^2 + \frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_0) = \text{const} = \left(\frac{nK\omega_0}{E_0} \mathcal{E}_i \right)^2 + \frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin \varphi_i - \varphi_i \cos \varphi_0).$$

Заметим, что вовлечение в ускорение равносильно ограниченности движения φ .

$$\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) = \text{const} = H$$

Получили задачу исследования движения в некотором "потенциале" V с "энергией" H .
Рассмотрим случай $K > 0$. Построим качественный вид V для этого случая.



Красным указан максимальный уровень "энергии", при котором движение финитно (происходит в ограниченной области). При большей "энергии" φ может расти неограниченно (движение вправо на графике).
Найдём это значение H . Оно определяется значением максимума V .

$$\frac{dV}{d\varphi} = \frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

Максимум соответствует $\varphi = |\varphi_0|$.

$$H = \frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin |\varphi_0| - |\varphi_0| \cos \varphi_0)$$

Тогда условие на φ_i и $\mathcal{E}_i$ имеет вид:

$$\left(\frac{nK\omega_0}{E_0} \mathcal{E}_i\right)^2 + \frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin \varphi_i - \varphi_i \cos \varphi_0) \leq \frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin |\varphi_0| - |\varphi_0| \cos \varphi_0).$$

Стоит отметить, что при этом существует дополнительное условие на φ_i . Изначально частица должна находится в "потенциальной яме", что соответствует $\varphi_i \leq |\varphi_0|$.
Заметим, что при $K < 0$ ситуация аналогичная, но теперь потенциал имеет максимум при $\varphi = -|\varphi_0|$. Тогда максимальная "энергия":

$$H = \frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (-\sin |\varphi_0| + |\varphi_0| \cos \varphi_0).$$

И аналогичное ограничение на фазу $\varphi_i \geq -|\varphi_0|$.

Заметим, что можно обобщить на произвольный знак K :

$$H = \frac{n|K|\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin |\varphi_0| - |\varphi_0| \cos \varphi_0).$$
$$\frac{K}{|K|} \varphi_i \leq |\varphi_0|$$

Итоговое выражение для искомой области:

Ответ:

$$\left(\frac{nK\omega_0}{E_0} \mathcal{E}_i\right)^2 + \frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin \varphi_i - \varphi_i \cos \varphi_0) \leq \frac{n|K|\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin |\varphi_0| - |\varphi_0| \cos \varphi_0);$$
$$\frac{K}{|K|} \varphi_i \leq |\varphi_0|.$$

Граница области:

$$\left(\frac{nK\omega_0}{E_0} \mathcal{E}_i\right)^2 + \frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin \varphi_i - \varphi_i \cos \varphi_0) = \frac{n|K|\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin |\varphi_0| - |\varphi_0| \cos \varphi_0);$$
$$\frac{K}{|K|} \varphi_i \leq |\varphi_0|.$$

Случай $\varphi_0 = 0$

$$\left(\frac{nK\omega_0}{E_0} \mathcal{E}_i\right)^2 + \frac{nK\omega_0^2 eU}{\pi E_0} (\sin \varphi_i - \varphi_i) = 0;$$

$$K\varphi_i \leq 0.$$

Несложно заметить, что при $\varphi_i \neq 0$:

$$K\left(\sin\varphi_i-\varphi_i\right)=-K\varphi_i\left(1-\frac{\sin\varphi_i}{\varphi_i}\right).$$

При этом $1-\frac{\sin\varphi_i}{\varphi_i}>0$, поэтому:

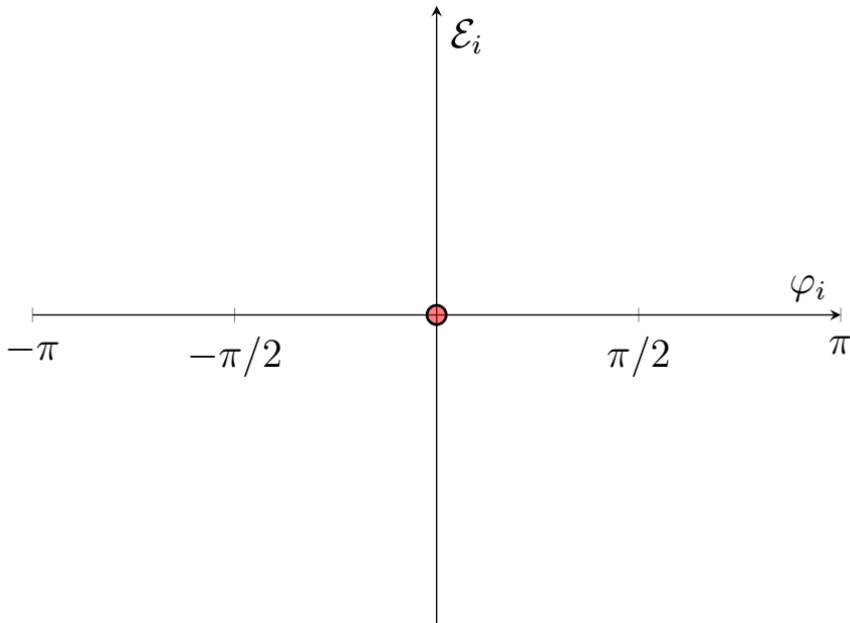
$$K\left(\sin\varphi_i-\varphi_i\right)=-K\varphi_i\left(1-\frac{\sin\varphi_i}{\varphi_i}\right)>0.$$

Подставим в первое неравенство и получим:

$$\left(\frac{nK\omega_0}{E_0}\mathcal{E}_i\right)^2<0.$$

Таким образом, единственная точка, удовлетворяющая условиям $(\varphi_i,\mathcal{E}_i)=(0,0)$.
Стоить отметить, что данный факт очевиден из рассмотрения энергетической аналогии. При $\varphi_0=0$ у потенциала нет минимума, есть только точка перегиба в нуле, поэтому единственный случай ограниченного движения – равновесие в нуле.

Ответ:



Случай $\varphi_0=\pi/4$

$$\left(\frac{nK\omega_0}{E_0}\mathcal{E}_i\right)^2+\frac{nK\omega_0^2eU}{\pi E_0}\left(\sin\varphi_i-\frac{\varphi_i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{n|K|\omega_0^2eU}{\pi E_0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{K}{|K|}\varphi_i\leq\frac{\pi}{4}$$

Получили два случая в зависимости от знака K :

Ответ:

