

A1 0.50

Запишите выражения для $\ddot{y}$ через $\dot{y}$, k , m_0 , μ , u , g и t .

Рассмотрим изменение импульса системы. Пусть в какой-то момент масса ракеты m и её скорость $\dot{y}$. Через малое время dt масса ракеты стала меньше на μdt , а скорость ракеты увеличилась на $\dot{y} dt$. При этом продукты сгорания в системе отсчёта Земли имеют скорость $u - \dot{y}$, направленную вниз. При этом на систему действуют две внешние силы: сопротивление воздуха и притяжение Земли, поэтому закон изменения импульса

$$m\dot{y} - mgdt - k\dot{y}|\dot{y}|dt = (m - \mu dt)(\dot{y} + \dot{y}dt) - \mu dt(u - \dot{y}).$$

Выразим $\ddot{y}$

$$-mg - k\dot{y}|\dot{y}| = m\ddot{y} - \mu u.$$

$$\ddot{y} = \frac{\mu u}{m} - g - \frac{k\dot{y}|\dot{y}|}{m}$$

Осталось выразить через требуемые величины.

Ответ:

$$\ddot{y} = \frac{\mu u}{m_0 - \mu t} - g - \frac{k\dot{y}|\dot{y}|}{m_0 - \mu t}$$

A2 1.00

Пренебрегая силой сопротивления, найдите скорость ракеты $v(m)$ и координату $y(m)$ в момент, когда её масса равна m . Выразите ответ через m , g , u , μ и m_0 .

Воспользуемся ответом из прошлого пункта и проинтегрируем дважды, пренебрегая силой сопротивления, подставляя $t = \frac{m_0 - m}{\mu}$

$$\ddot{y}dt = \frac{\mu u}{m}dt - gdt,$$

$$\int_0^v d\dot{y} = - \int_{m_0}^m u \frac{dm}{m} - \int_0^t gdt,$$

Ответ:

$$v = -u \ln \frac{m}{m_0} - g \frac{m_0 - m}{\mu}$$

Интегрируя выражение для скорости по времени

$$\int_0^y dy = -u \int_0^t \ln \left(1 - \frac{\mu t}{m_0} \right) dt - \int_0^t gtdt.$$

Для интеграла логарифма известно $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$

$$y = \frac{um_0}{\mu} \left(\left(1 - \frac{\mu t}{m_0} \right) \ln \left(1 - \frac{\mu t}{m_0} \right) - \left(1 - \frac{\mu t}{m_0} \right) + 1 \right) - \frac{gt^2}{2},$$

Ответ:

$$y = \frac{um_0}{\mu} \left(1 - \frac{m}{m_0} \ln \frac{m_0}{m} - \frac{m}{m_0} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{m_0 - m}{\mu} \right)^2$$

A3 0.80

Используя результат прошлого пункта и считая, что k слабо зависит от высоты, найдите численно, на какой высоте H_c будет находиться ракета в момент, когда сила сопротивления станет равна силе тяжести.

Запишем условие равенства силы тяжести и силы сопротивления

$$kv^2 = mg,$$

$$k \left(-u \ln \frac{m}{m_0} - g \frac{m_0 - m}{\mu} \right)^2 = mg.$$

Решая численно уравнение относительно m , получаем $m = 209$ т. Подставим массу в формулу для высоты подъема y .

Ответ:

$$H_c = 124 \text{ км}$$

A4 ^{0.70} Рассматривая вертикальный взлёт, численно оцените отношение β_1 начальной к конечной массе ракеты, при котором ракета развивает скорость v_a (скорость движения по круговой орбите радиуса a).

Для движения по орбите радиусом a имеем $v_a = \sqrt{\frac{GM_e}{a}}$, подставим выражение в формулу для скорости v из пункта **A2**, получим численный ответ.

Ответ:

$$\beta_1 = 8.03$$

B1 ^{0.30} Рассмотрим точку на прямой Земля — Луна между Землёй и Луной, в которой силы притяжения Земли и Луны равны по модулю. Найдите расстояние r_c от Луны до данной точки. Ответ выразите через r_m , M_e и M_m .

Равенство сил на расстоянии r_c

$$\frac{GM_m}{r_c^2} = \frac{GM_e}{(r_m - r_c)^2}$$

Преобразуя получаем

$$r_c = \frac{r_m}{\sqrt{\frac{M_e}{M_m}} + 1}$$

Ответ:

$$r_c = \frac{r_m}{1 + \sqrt{\frac{M_e}{M_m}}} = 3.86 \cdot 10^7 \text{ м}$$

B2 ^{0.50} Рассматривая корабль в СО Луны, запишите выражение для удельного момента импульса L_0^m относительно центра Луны и скорости v_2 в момент, когда расстояние до Луны равно r_c . Ответ выразите через s , s' , c , v_1 , v_m и r_c .

Вектор $\vec{v}_2$ получается из вектора скорости $\vec{v}_1$ вычитанием вектора $\vec{v}_m$, откуда можно составить треугольник скоростей. Используя теорему косинусов

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + v_m^2 - 2v_mv_1\sin\alpha}.$$

Ответ:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + v_m^2 - 2v_mv_1s'}$$

Запишем удельный момент импульса по определению

$$\vec{L}_0^m = [\vec{r}_c, \vec{v}_1 - \vec{v}_m] = [\vec{r}_c, \vec{v}_1] - [\vec{r}_c, \vec{v}_m].$$

Возьмем модуль выражения

$$L_0^m = r_c(v_1\sin(\theta + \alpha) - v_m\cos\theta).$$

Ответ:

$$L_0^m = r_c(v_1s - v_mc)$$

B3 ^{1.20} Записывая ЗСЭ в СО Луны для ближайшего к Луне положения корабля и положения сразу после входа в зону притяжения, получите и решите квадратное уравнение и получите точное выражение для v_1/v_m . Ответ выразите через s , s' , c , b/r_c и v_{II}^m/v_m .
Примечание. Выбирать знак корня в этом пункте не нужно. Не забудьте, что в рамках используемой модели, взаимодействие с Землёй в этой области учитывать не нужно.

Пусть в ближайшей к Луне точке скорость корабля v . Тогда из закона сохранения импульса получаем:

$$vb = L_0^m.$$

$$v = \frac{r_c}{b}(v_1 s - v_m c)$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM_m}{b} = \frac{v_2^2}{2} - \frac{GM_m}{r_c}.$$

$$\frac{r_c^2}{b^2}(v_1 s - v_m c)^2 - (v_{\Pi}^m)^2 = v_1^2 + v_m^2 - 2v_m v_1 s' - (v_{\Pi}^m)^2 \frac{b}{r_c}$$

Для удобства обозначим $Z = v_1/v_m$, $x = b/r_c$, $y = v_{\Pi}^m/v_m$.

$$\frac{1}{x^2}(Zs - c)^2 - y^2 = Z^2 + 1 - 2Zs' - y^2 x$$

$$Z^2 (s^2 - x^2) - 2Z(sc - x^2 s') + c^2 - x^2 - y^2 x^2(1 - x) = 0$$

$$Z = \frac{sc - x^2 s' \pm \sqrt{(sc - x^2 s')^2 - (s^2 - x^2)(c^2 - x^2 - y^2 x^2(1 - x))}}{s^2 - x^2}$$

Ответ:

$$\frac{v_1}{v_m} = \frac{sc - \left(\frac{b}{r_c}\right)^2 s' \pm \sqrt{\left(sc - \left(\frac{b}{r_c}\right)^2 s'\right)^2 - \left(s^2 - \left(\frac{b}{r_c}\right)^2\right)\left(c^2 - \left(\frac{b}{r_c}\right)^2 - \left(\frac{v_{\Pi}^m}{v_m}\right)^2 \left(\frac{b}{r_c}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{b}{r_c}\right)\right)\right)}}{s^2 - \left(\frac{b}{r_c}\right)^2}$$

B4 1.00

Покажите что выражение для v_1 , полученное в пункте **B4**, при разложении до первого порядка по степеням b/r_c приводится к виду:

$$v_1 \approx \frac{v_m c}{s} + B_0 \cdot \frac{b}{r_c}$$

Выразите B_0 через v_m , v_{Π}^m , s , c и s' . Выбирая знак корня, покажите, что $B_0 > 0$.

Будем раскладывать до первого порядка по x .

$$Z = \frac{sc - x^2 s' \pm \sqrt{(sc - x^2 s')^2 - (s^2 - x^2)(c^2 - x^2 - y^2 x^2(1 - x))}}{s^2 - x^2}$$

Рассмотрим выражение под корнем с точностью до второго порядка (он может дать вклад порядка первого порядка, если под корнем нет слагаемых нулевого и первого порядка, что выполняется в данном случае):

$$(sc - x^2 s')^2 - (s^2 - x^2)(c^2 - x^2 - y^2 x^2(1 - x)) \approx s^2 c^2 - 2scs' x^2 - (s^2 c^2 - x^2 (c^2 + s^2 + y^2 s^2)) =$$

$$= (c^2 + s^2 + y^2 s^2 - 2scs') x^2.$$

Выражение для Z с точностью до первого порядка:

$$Z = \frac{sc \pm x \sqrt{c^2 + s^2 + y^2 s^2 - 2scs'}}{s^2}.$$

$$v_1 = \frac{v_m c}{s} \pm \frac{v_m \sqrt{c^2 + s^2 + \left(\frac{v_{\Pi}^m}{v_m}\right)^2 s^2 - 2scs'}}{s^2} \cdot \frac{b}{r_c}$$

Несложно заметить, что без второго слагаемого получаем скорость, при которой корабль летит точно в Луну. Знак "+" соответствует нужному полёту вокруг Луны, а знак "-" соответствует пролёту с другой стороны.

Таким образом, итоговое выражение для v_1 имеет вид:

$$v_1 = \frac{v_m c}{s} + \frac{v_m \sqrt{c^2 + s^2 + \left(\frac{v_{\Pi}^m}{v_m}\right)^2 s^2 - 2scs'}}{s^2} \cdot \frac{b}{r_c}$$

Ответ:

$$B_0 = \frac{v_m \sqrt{c^2 + s^2 + \left(\frac{v_{\Pi}^m}{v_m}\right)^2 s^2 - 2scs'}}{s^2}$$

B5 0.60

Покажите, что выражение для v_1 с точностью до **первого** порядка имеет вид:

$$v_1 \approx \frac{v_m}{\operatorname{tg} \theta} + A\alpha + B\frac{b}{r_c}$$

Выразите A и B через v_m, v_{Π}^m, θ .

Заметим, что в ответе прошлого пункта можно разложить B_0 до нулевого порядка, так как при учёте поправок будем получать слагаемые высокого порядка малости (как минимум второго вида $\alpha b/r_c$).

$$B_0 \approx \frac{v_m \sqrt{\cos^2 + \sin^2 \theta + \left(\frac{v_{\Pi}^m}{v_m}\right)^2 \sin^2 \theta}}{\sin^2 \theta} = \frac{v_m \sqrt{1 + \left(\frac{v_{\Pi}^m}{v_m}\right)^2 \sin^2 \theta}}{\sin^2 \theta}$$

Разложим $v_m c/s$.

$$\frac{v_m c}{s} = \frac{v_m \cos \theta}{\sin(\alpha + \theta)} \approx \frac{v_m \cos \theta}{\sin \theta + \alpha \cos \theta} \approx \frac{v_m}{\operatorname{tg} \theta} \left(1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \theta}\right)$$

$$v_1 = \frac{v_m}{\operatorname{tg} \theta} - \frac{v_m}{\operatorname{tg}^2 \theta} \alpha + \frac{v_m \sqrt{1 + \left(\frac{v_{\Pi}^m}{v_m}\right)^2 \sin^2 \theta}}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{b}{r_c}$$

Ответ:

$$A = -\frac{v_m}{\operatorname{tg}^2 \theta}$$

$$B = \frac{v_m \sqrt{1 + \left(\frac{v_{\Pi}^m}{v_m}\right)^2 \sin^2 \theta}}{\sin^2 \theta}$$

В6^{0.60}

Вернёмся в систему отсчёта Земли, чтобы найти выражение для угла α между скоростью v_1 и прямой Земля — Луна.

Найдите выражение для α между скоростью v_1 и прямой Земля — Луна с точностью до первого порядка по степеням r_c/r_m и a/r_m . Ответ выразите через a, r_c, r_m, v_1, v_0 и θ .

Примечание. Не забудьте, что в рамках используемой модели, взаимодействие с Луной в этой области учитывать не нужно.

Воспользуемся законом сохранения момента импульса относительно Земли. Рассмотрим проекции $\vec{v}_1$ и радиус-вектора от Земли $\vec{r}$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \cos \alpha \\ v_1 \sin \alpha \end{pmatrix},$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_m - r_c \cos \theta \\ r_c \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Закон сохранения импульса:

$$v_0 a = v_1 \sin \alpha (r_m - r_c \cos \theta) - v_1 r_c \cos \alpha \sin \theta.$$

$$\frac{v_0 a}{v_1 \sqrt{r_m^2 - 2r_m r_c \cos \theta + r_c^2}} = \sin \left(\alpha - \operatorname{arctg} \left(\frac{r_c \sin \theta}{r_m - r_c \cos \theta} \right) \right)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{r_c \sin \theta}{r_m - r_c \cos \theta} \right) + \arcsin \left(\frac{v_0 a}{v_1 \sqrt{r_m^2 - 2r_m r_c \cos \theta + r_c^2}} \right) \approx \frac{r_c \sin \theta}{r_m} + \frac{v_0 a}{v_1 r_m}$$

Ответ: с

В7^{0.40}

Записывая ЗСЭ в СО Земли и, пренебрегая слагаемыми порядка a/r_m и r_c/r_m , выразите скорость v_0 через v_1 и v_{Π}^e .

Примечание. Не забудьте, что в рамках используемой модели, взаимодействие с Луной в этой области учитывать не нужно.

Закон сохранения энергии:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{GM_e}{a} = \frac{v_1^2}{2}.$$

Заметим, что потенциальную энергию в правой части уравнения не учитываем, так как она имеет порядок a/r_m .

$$v_0^2 - \left(v_{\Pi}^e\right)^2 = v_1^2$$

Ответ:

$$v_0 = \sqrt{\left(v_{\Pi}^e\right)^2 + v_1^2}$$

В8^{1.00}

Записывая уравнение конического сечения, получите уравнение, из которого можно найти θ , через v_1 , α , v_m , G , M_m , b и r_c .

Запишем уравнение канонического сечения $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$. Запишем это уравнение для точек, расстояние до которых r_c и b

$$b = \frac{p}{1 + e},$$
$$r_c = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}.$$

Выражая из уравнений эксцентриситет и приравнявая получаем

$$\frac{p}{b} - 1 = \left(1 - \frac{p}{r_c}\right) \cdot \frac{1}{\cos \theta}.$$

Подставим p по формуле

$$p = \frac{(L_0^m m)^2}{GM_m m^2} = \frac{(v_1 \sin(\alpha + \theta) - v_m \cos \theta)^2 r_c^2}{GM_m}$$

Ответ:

$$\frac{(v_1 \sin(\alpha + \theta) - v_m \cos \theta)^2 r_c^2}{GM_m b} - 1 = \left(1 - \frac{(v_1 \sin(\alpha + \theta) - v_m \cos \theta)^2 r_c}{GM_m}\right) \cdot \frac{1}{\cos \theta}$$

В9^{0.40}

Найдите β_2 — отношение начальной массы ракеты к конечной при разгоне от скорости v_a — орбитальной скорости при движении по круговой орбите радиуса a до скорости v_0 . Ответ выразите через u , v_{II}^e и v_a .
Рассчитайте численное значение β_2 , необходимые для расчётов величины возьмите из части А.

Запишем дифференциальное уравнение из пункта А1 без учета силы притяжения и силы сопротивления:

$$mdv + u dm = 0,$$
$$\int_{v_a}^{v_{II}^e} \frac{dv}{u} = - \int_{m_0}^m \frac{dm}{m},$$
$$\frac{v_{II}^e - v_a}{u} = - \ln \frac{m}{m_0},$$
$$\beta_2 = \exp \left(\frac{v_{II}^e - v_a}{u} \right)$$

Ответ:

$$\beta_2 = \exp \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{u} \cdot \sqrt{\frac{GM_e}{a}} \right) = 2.05$$

С1^{0.50}

Считая $v_2 = 1.5$ км/с (остальные необходимые величины возьмите из прошлых частей задачи), рассчитайте численно, во сколько раз уменьшится масса ракеты в процессе прилунения β_3 .

Запишем ЗСЭ для перемещения ракеты от начала зоны притяжения луны до точки, в который мы выходим на орбиту, близкую к луне

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{GM_m m}{r_c} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GM_m m}{b},$$
$$v = \sqrt{v_2^2 - 2GM_m \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{b} \right)}.$$

Запишем формулу Циолковского, полученную в пункте В9 с заменой знака скорости истечения газов

$$\frac{v}{u} = \ln \frac{m_0}{m_3}$$

Ответ:

$$\beta_3 = \exp \left(\frac{\sqrt{v_2^2 - 2GM_m \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{b} \right)}}{u} \right) = 1.83$$

C2^{0.50}

Рассчитайте численно какую начальную массу m должна иметь ракета для доставки на Луну груза весом 40 т.

Ответ:

$$m = \beta_1 \beta_2 \beta_3 m_{\text{груз}} \approx 2300 \text{ т}$$