

A1 0.30

Покажите, что зависимость проводимости от частоты в рассматриваемой модели имеет вид

$$\sigma = \frac{D}{-i\omega + \frac{1}{\tau}}.$$

Выразите коэффициент D через n, q, m .

Уравнение движения электрона имеет вид

$$m\dot{\vec{v}} = -\frac{m}{\tau}\vec{v} - q\vec{E}.$$

Подставляя решение в виде экспонент, получим

$$m\vec{v}_0 \left(-i\omega + \frac{1}{\tau} \right) = -q\vec{E}_0,$$

откуда

$$\vec{v}_0 = \frac{-q\vec{E}_0/m}{-i\omega + 1/\tau}.$$

Тогда плотность тока

$$\vec{j} = -qn\vec{v} = \frac{nq^2/m}{-i\omega + 1/\tau}\vec{E},$$

а проводимость

$$\sigma = \frac{nq^2/m}{-i\omega + 1/\tau}.$$

Ответ:

$$D = \frac{nq^2}{m}$$

A2 0.50

Пусть теперь система помещена в магнитное поле B , направленное вдоль оси z . Комплексная амплитуда электрического поля $\vec{E}_0$ лежит в плоскости xy , ее проекции E_{0x}, E_{0y} . Запишите уравнения для определения компонент установившейся скорости движения электронов v_{0x}, v_{0y} .

Уравнения движения с учетом магнитного поля имеют вид

$$m\dot{\vec{v}} = -\frac{m}{\tau}\vec{v} - q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Подставляя решение в экспоненциальном виде и расписывая векторное произведение через компоненты, получаем

Ответ:

$$\begin{aligned} mv_{0x} \left(-i\omega + \frac{1}{\tau} \right) &= -q(E_{0x} + v_{0y}B), \\ mv_{0y} \left(-i\omega + \frac{1}{\tau} \right) &= -q(E_{0y} - v_{0x}B) \end{aligned}$$

A3 1.20

Покажите, что проводимости в магнитном поле удовлетворяют соотношениям $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}, \sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$. Выразите σ_{xx} и σ_{xy} через ω, D, τ и частоту движения электронов в магнитном поле $\omega_B = qB/m$.

Перенесем слагаемые со скоростью в левую часть, разделим уравнения на массу и введем вместо магнитного поля частоту ω_B :

$$\begin{aligned} \left(-i\omega + \frac{1}{\tau} \right) v_{0x} + \omega_B v_{0y} &= -\frac{q}{m} E_{0x}, \\ -\omega_B v_{0x} + \left(-i\omega + \frac{1}{\tau} \right) v_{0y} &= -\frac{q}{m} E_{0y}. \end{aligned}$$

Домножим первое уравнение на $(-i\omega + 1/\tau)$, второе на $-\omega_B$ и сложим, получим

$$\left((-i\omega + 1/\tau)^2 + \omega_B^2 \right) v_{0x} = -\frac{q}{m} \left((-i\omega + 1/\tau) E_{0x} - \omega_B E_{0y} \right).$$

Аналогично первое уравнение домножим на ω_B , второе на $(-i\omega + 1/\tau)$:

$$\left((-i\omega + 1/\tau)^2 + \omega_B^2 \right) v_{0y} = -\frac{q}{m} \left(\omega_B E_{0x} + (-i\omega + 1/\tau) E_{0y} \right).$$

Используя связь плотности тока и скорости $\vec{j} = -qn\vec{v}$, найдем (экспоненциальные множители одинаковы, поэтому для токов выполняются такие же соотношения, как и для амплитуд)

$$j_x = \frac{nq^2}{m} \frac{(-i\omega + 1/\tau)E_x - \omega_B E_y}{(-i\omega + 1/\tau)^2 + \omega_B^2}, \quad j_y = \frac{nq^2}{m} \frac{\omega_B E_x + (-i\omega + 1/\tau)E_y}{(-i\omega + 1/\tau)^2 + \omega_B^2}.$$

Заметим, что при нулевом магнитном поле $\omega_B = 0$ и получается соотношение из предыдущего пункта. Вид этих выражений совпадает с указанным в условии, из него можно получить выражения для проводимостей, равенства $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ и $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ следуют непосредственно из этих выражений.

Ответ:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{D(-i\omega + 1/\tau)}{(-i\omega + 1/\tau)^2 + \omega_B^2},$$
$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{D\omega_B}{(-i\omega + 1/\tau)^2 + \omega_B^2}$$

В1^{0.30}

Найдите отношение комплексных амплитуд полей E_{0y}/E_{0x} для правой и левой круговой поляризации.

Поле с правой круговой поляризацией вращается в плоскости xy против часовой стрелки, в вещественном виде зависимость имеет вид

$$E_x = A \cos \omega t, \quad E_y = A \sin \omega t.$$

Переходя к комплексной записи, получим

$$E_x = \text{Re}(Ae^{-i\omega t}), \quad E_y = \text{Re}(iAe^{-i\omega t}).$$

Поэтому для правой поляризации $E_{0y}/E_{0x} = i$. Для левой поляризации обратного направления вращения можно добиться, изменив знак E_y .

Ответ: Правая поляризация: $E_{0y}/E_{0x} = i$, левая поляризация: $E_{0y}/E_{0x} = -i$

В2^{0.50}

Покажите, что для круговых поляризаций выполняются соотношения $\vec{j} = \sigma_{\pm} \vec{E}$ и найдите соответствующие значения проводимости $\sigma_{\pm}$. Выразите ответ через проводимости σ_{xx} и σ_{xy} .

Сначала подставим в формулу для плотности тока поле с правой поляризацией, то есть $E_{0x} = A$, $E_{0y} = iA$:

$$j_{0x} = \sigma_{xx}A + i\sigma_{xy}A, \quad j_{0y} = -\sigma_{xy}A + i\sigma_{xx}A.$$

Здесь во втором равенстве использовано соотношение между проводимостями. Отсюда получаем $j_{0y} = ij_{0x}$, а значит

$$\vec{j} = (\sigma_{xx} + i\sigma_{xy})\vec{E}, \quad \sigma_+ = \sigma_{xx} + i\sigma_{xy}.$$

Аналогичное вычисление для левой поляризации отличается только знаком перед σ_{xy} .

Ответ:

$$\sigma_+ = \sigma_{xx} + i\sigma_{xy}, \quad \sigma_- = \sigma_{xx} - i\sigma_{xy}$$

В3^{0.40}

Для среды с соотношением $\vec{j} = \sigma(\omega)\vec{E}$ определите диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$ и отвечающей ей показатель преломления n , выразите ответ через σ , ω и фундаментальные постоянные.

Вектор электрической индукции выражается через электрическое поле и вектор поляризации соотношениями

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Отсюда

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}.$$

Выразим плотность тока через производную вектора поляризации и сравним с выражением через проводимость

$$\vec{j} = -i\omega\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E} = \sigma\vec{E}.$$

Отсюда получаем

Ответ:

$$\varepsilon = 1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}, \quad n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}}$$

B4 0.50

Считая, что показатели преломления близки к 1, найдите разность показателей преломления для волн с правой и левой поляризацией $\Delta n = n_+ - n_-$. Выразите ответ через ω , σ_{xx} , σ_{xy} и фундаментальные постоянные.

Поскольку показатель преломления близок к 1, выражение из предыдущего пункта можно разложить до первого порядка, для круговых поляризаций получим

$$n_{\pm} = 1 + \frac{i\sigma_{\pm}}{2\varepsilon_0\omega} = 1 + \frac{i(\sigma_{xx} \pm i\sigma_{xy})}{2\varepsilon_0\omega}.$$

Вычисляя разность, находим

$$\Delta n = \frac{i(\sigma_{xx} + i\sigma_{xy})}{2\varepsilon_0\omega} - \frac{i(\sigma_{xx} - i\sigma_{xy})}{2\varepsilon_0\omega} = -\frac{\sigma_{xy}}{\varepsilon_0\omega}.$$

Обратим внимание, что проводимость σ_{xx} в первом порядке сокращается.

Ответ:

$$\Delta n = -\frac{\sigma_{xy}}{\varepsilon_0\omega}.$$

B5 0.80

Пусть на слой среды толщины h падает плоская монохроматическая волна с линейной поляризацией. Границы среды перпендикулярны оси z , волна распространяется вдоль оси z . Покажите, что после прохождения среды направление поляризации поворачивается на угол θ_F . Выразите этот угол через h , σ_{xy} и фундаментальные постоянные.

Не ограничивая общности можно считать, что изначально волна поляризована вдоль оси x , амплитуда волны A . Представим ее в виде суперпозиции двух волн с круговыми поляризациями, будем записывать вектора комплексных амплитуд в виде столбцов:

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{A}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

После прохождения через среду разные круговые поляризации приобретут разные фазы, амплитуда поля после прохождения через среду

$$\vec{E}_1 = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{ikn_+h} + \frac{A}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{ikn_-h}.$$

Здесь k – волновое число в вакууме. Вынося общую фазу $\Delta\varphi_0 = kh(n_+ + n_-)/2$, получим

$$\vec{E}_1 = e^{i\Delta\varphi_0} \frac{A}{2} \begin{pmatrix} e^{ik\Delta nh/2} + e^{-ik\Delta nh/2} \\ i(e^{ik\Delta nh/2} - e^{-ik\Delta nh/2}) \end{pmatrix} = Ae^{i\Delta\varphi_0} \begin{pmatrix} \cos \frac{kh\Delta n}{2} \\ -\sin \frac{kh\Delta n}{2} \end{pmatrix}.$$

Получили выражение для линейной поляризации, повернутой на угол

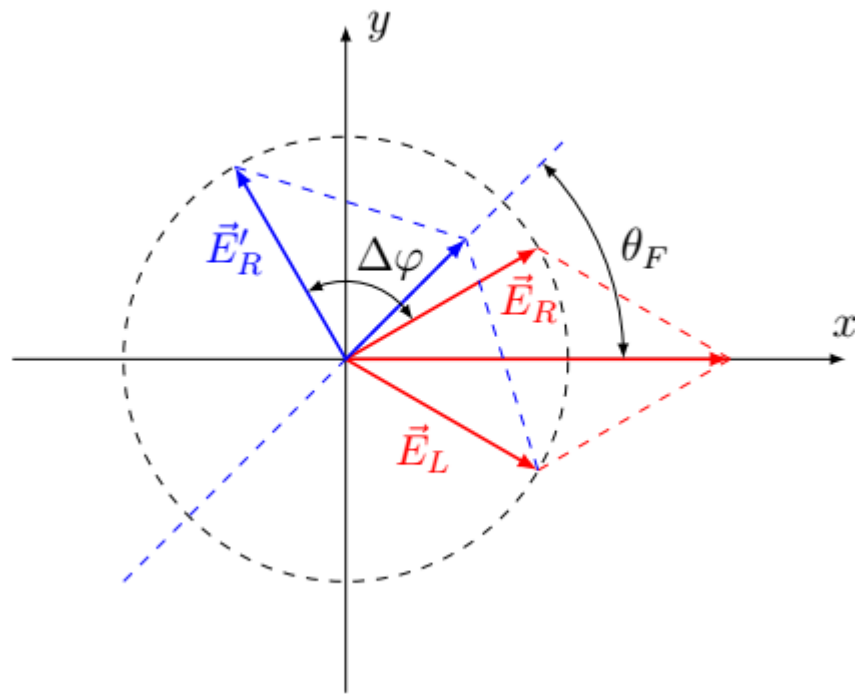
$$\theta_F = -\frac{k\Delta nh}{2}.$$

Знак $-$ означает, что поворот происходит по часовой стрелке. Подставляя выражение для разности показателей преломления и используя соотношение для частоты и волнового числа в вакууме $\omega = ck$, получим

$$\theta_F = \frac{kh\sigma_{xy}}{2\varepsilon_0\omega} = \frac{\sigma_{xy}h}{2\varepsilon_0c}.$$

Ответ:

$$\theta_F = \frac{\sigma_{xy}h}{2\varepsilon_0c}$$



Этот же результат для угла поворота можно получить с помощью векторных диаграмм. Волну с линейной поляризацией можно представить как суперпозицию двух волн с круговыми поляризациями и равными амплитудами. Эти волны можно представить как пару векторов в плоскости xy вращающихся против и по часовой стрелки соответственно. При этом колебания в волне с линейной поляризацией происходят вдоль биссектрисы угла между двумя векторами круговых поляризаций, изначально это ось x . После прохождения через среду между волнами с круговыми поляризациями возникает дополнительная разность фаз $\Delta\varphi$. Это означает, что при том же положении вектора волны с левой поляризацией, вектор волны с правой поляризацией повернется на $\Delta\varphi = -kh\Delta n$. Знак $-$ связан с тем, что колебание имеет вид

$$\text{Re } e^{-i\omega t + ikh\Delta n} = \cos(\omega t - \Delta\varphi).$$

Результирующее колебание все еще представляет собой сумму двух волн с круговыми поляризациями и равными амплитудами, но биссектриса между их векторами повернута на угол $\theta_F = \Delta\varphi/2$, что совпадает с найденным ранее ответом.

B6 ^{0.50} Используя результат пункта **A3**, получите вещественное выражение для угла поворота плоскости поляризации θ_F . Оставьте от полученного выше выражения вещественную часть. Ответ выразите через $D, h, \tau, \omega_B, \omega$ и фундаментальные постоянные.

Подставим выражение для проводимости:

$$\theta_F = -\frac{D\omega_B h}{2\varepsilon_0 c} \frac{1}{(-i\omega + 1/\tau)^2 + \omega_B^2}.$$

За поворот плоскости поляризации отвечает вещественная часть этого выражения, чтобы выделить ее, раскроем скобки в знаменателе и домножим числитель и знаменатель на сопряженные выражения:

$$\frac{1}{(-i\omega + 1/\tau)^2 + \omega_B^2} = \frac{1}{\omega_B^2 + 1/\tau^2 - \omega^2 - 2i\omega/\tau} = \frac{\omega_B^2 + 1/\tau^2 - \omega^2 + 2i\omega/\tau}{(\omega_B^2 + 1/\tau^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2}.$$

Взяв вещественную часть, получим

Ответ:

$$\theta_F = -\frac{D\omega_B h}{2\varepsilon_0 c} \frac{\omega_B^2 + 1/\tau^2 - \omega^2}{(\omega_B^2 + 1/\tau^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2}.$$

B7 ^{1.50} В общем случае показатели преломления для обеих круговых поляризаций будут содержать различные мнимые части, что приведет в общем случае к эллиптической поляризации. Пусть параметры системы таковы, что $kn_+h = 0.73 + 0.18i$, $kn_-h = 1.17 + 0.35i$, где отброшены несущественные слагаемые, кратные 2π . Здесь k – волновое число в вакууме. Поляризация падающей волны направлена вдоль оси x . Найдите отношение полуосей a/b и угол ψ между большой полуосью и осью x для эллипса конечной поляризации.

Как и в предыдущей части разность вещественных частей произведений $kh(n_+ - n_-)$ приводит к изменению направления поляризации, причем угол поворота

$$\psi_1 = -\frac{kh}{2} \text{Re}\Delta n = 0.22 \text{ рад} \approx 12.6^\circ.$$

Выберем направление новой оси x' вдоль повернутого направления поляризации, а y' перпендикулярно ей. Разность мнимых компонент приведет к изменению амплитуд круговых поляризаций, поэтому в повернутых осях комплексная амплитуда имеет вид (несущественную общую фазу не учитываем)

$$\vec{E}_1 = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-\gamma_1} + \frac{A}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-\gamma_2} = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} e^{-\gamma_1} + e^{-\gamma_2} \\ i(e^{-\gamma_1} - e^{-\gamma_2}) \end{pmatrix}.$$

Здесь показатели экспоненты γ определяются мнимыми частями выражений из условия: $\gamma_1 = kh \text{Im } n_+ = 0.18$, $\gamma_2 = kh \text{Im } n_- = 0.35$. Сдвиг фаз между колебаниями по осям x' и y' после учета затухания все еще $\pi/2$, поэтому эти оси совпадают с главными осями эллипса поляризации. Значит отношение осей

$$\frac{a}{b} = \frac{e^{-\gamma_1} + e^{-\gamma_2}}{e^{-\gamma_1} - e^{-\gamma_2}} \approx 11.8,$$

а большая ось повернута на угол $\psi = \psi_1$ относительно исходной оси.

Ответ:

$$\psi \approx 0.22 \text{ рад} \approx 12.6^\circ, \quad \frac{a}{b} \approx 11.8, \quad \frac{b}{a} \approx 0.0845$$

C1^{0.50}

Найдите частоту ω_B движения электрона с энергией ε_F в магнитном поле. Выразите ответ через v_F , q , B , ε_F .

Поскольку применимо стандартное выражение для силы Лоренца, действующая на электрон магнитная сила будет равна по величине qv_FB и направлена перпендикулярно скорости. Модуль импульса электрона остается постоянным в силу закона сохранения энергии, поэтому движение происходит по окружности и закон изменения импульса имеет вид

$$\omega_B p = qv_FB.$$

Подставляя выражение для модуля импульса $p = \varepsilon_F/v_F$, находим

Ответ:

$$\omega_B = \frac{qv_F^2 B}{\varepsilon_F}$$

C2^{1.50}

Проанализировав приведенный график, определите для исследуемого образца графена параметры D_2 , τ и ω_B . Магнитное поле $B = 7$ Тл. При анализе графика можно считать, что $\omega_B \tau \gg 1$.

Будем анализировать график с помощью формулы из **B6** с указанными в условии заменами

$$\theta_F = C \frac{1 + \tau^2(\omega_B^2 - \omega^2)}{(1 + \tau^2(\omega_B^2 - \omega^2))^2 + 4\omega^2\tau^2}, \quad C = \frac{D_2\omega_B\tau^2}{2\varepsilon_0 c}.$$

Общий знак несущественен, поскольку направление поворота не указано. В силу условия $\omega_B^2\tau \gg 1$ в числителе и в первой скобке в знаменателе можно пренебречь 1:

$$\theta_F = C \frac{\omega_B^2 - \omega^2}{\tau^2(\omega^2 - \omega_B^2)^2 + 4\omega^2}.$$

Угол поворота обращается в 0 при $\omega^2 = \omega_B^2$. ЭИз графика видно, что в области отрицательных θ_F есть максимум модуля угла поворота. Найдем его положение аналитически. Для этого введем вспомогательную переменную $y = \omega_B^2 - \omega^2$. Угол поворота выражается через нее как

$$\theta_F = C \frac{y}{y^2\tau^2 + 4\omega_B^2 - 4y} = \frac{C}{y\tau^2 + \frac{4\omega_B^2}{y} - 4}.$$

Знаменатель минимален при $y = \pm 2\omega_B/\tau$, причем для максимума модуля на графике $\omega > \omega_B$ и нужно выбрать отрицательный корень. Соответствующее значение угла

$$\theta_1 = -\frac{C}{4(\omega_B\tau + 1)}$$

Из графика 0 и максимуму модуля отвечают частоты

$$f_0 \approx 4.7 \text{ ТГц}, \quad f_{\max} \approx 6.5 \text{ ТГц}.$$

Отсюда сразу находим $\omega_B = 2\pi f_0 \approx 29.5 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$. Из положения максимума

$$(2\pi f_{\max})^2 = \omega_B^2 + \frac{2\omega_B}{\tau},$$

отсюда находим

$$\frac{1}{\tau} = 13.5 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}, \quad \tau = 7.4 \cdot 10^{-14} \text{ с}.$$

Значение $\omega_B\tau \approx 2$ не очень велико, однако при вычислении положения максимума в ответ входит квадрат этого выражения, что дает ошибку порядка 20%.

Из значения в максимуме $\theta_1 \approx -0.055$ находим

$$C \approx 0.70,$$

и получаем вес Друде

$$D_2 = \frac{2\varepsilon_0 c}{\omega_B\tau^2} C \approx 2.3 \cdot 10^{10} \text{ Кл}^2 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$

C3^{0.50}

Используя результаты предыдущего пункта, определите значения ε_F (в электронвольтах) и v_F .

Используя значение D_2 находим

$$\epsilon_F = \frac{2\hbar^2}{q^2} D_2 \approx 0.125 \text{ эВ}.$$

Из формулы для частоты движения в магнитном поле

$$v_F = \sqrt{\frac{\epsilon_F \omega_B}{qB}} \approx 0.7 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

D1 1.00 Пусть на систему слева падает естественный свет с интенсивностью I_0 . Найдите интенсивность I_1 излучения на выходе из системы. Найдите также интенсивность I_2 на выходе, если такой же естественный свет падает на систему справа. При каких значениях B_z отношение интенсивностей I_2/I_1 будет минимально?

После прохождения через первый поляроид интенсивность уменьшается в 2 раза, а поляризация направлена вдоль оси x . При движении вдоль оси z поляризация поворачивается на угол φ к оси y , а интенсивность прошедшего света будет равна

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \cos^2(\psi - \varphi) = \frac{I_0}{2} \cos^2(\psi - VhB).$$

При движении в обратную сторону направление вращения поляризации меняется, поэтому выражение интенсивности

$$I_2 = \frac{I_0}{2} \cos^2(\psi + \varphi) = \frac{I_0}{2} \cos^2(\psi + VhB).$$

Отношение I_2/I_1 минимально, когда прошедшего света нет и $I_2 = 0$. Это достигается при

$$\psi + VhB = \frac{\pi}{2} + \pi m,$$

Ответ:

$$B = \frac{\psi - \pi/2 - \pi m}{Vh}.$$