

A1 0.20 Выразите изменение диаметра области намотки δD через D , h и δh .

Выразим объем резины:

$$V = \pi D^2 h$$

Продифференцируем выражение:

$$2D \delta D h + D^2 \delta h = 0$$

Отсюда:

Ответ:

$$\delta D = -\frac{D}{2h} \delta h$$

A2 0.10 Изменение полной длины провода δL пропорционально δh

$$\delta L = \Lambda \delta h.$$

Выразите Λ через N , D , h . Количество оборотов N жестко зафиксировано.

$$\delta L = \pi N \delta D = -\frac{\pi N D}{2h} \delta h$$

Ответ:

$$\Lambda = -\frac{\pi N D}{2h}$$

A3 0.60 Найдите энергию деформации провода W . Ответ выразите через N , D , h , d , E и δh

Объемная плотность энергии деформации выражается как:

$$w = \frac{E \delta L^2}{2L^2}$$

Объем провода:

$$V = \frac{\pi^2 d^2 N D}{4}$$

Выразим ответ через заданные в условии величины:

Ответ:

$$W = \frac{E \pi^2 N D d^2 \delta h^2}{32 h^2}$$

A4 0.50 Пусть в некоторый момент времени корпус смещен ($y \neq 0$) и груз не находится в равновесии ($x \neq y$). Получите уравнение движения груза в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A y.$$

Выразите ω_0 и A через M , h , N , D , d и E .

Полная энергия равна:

$$2W = \frac{E \pi^2 N D d^2 (x - y)^2}{16 h^2}$$

Выразим силу, действующую на груз:

$$F = \frac{\partial(2W)}{\partial(\delta h)} = M \ddot{x}$$

Итоговое уравнение:

$$\ddot{x} + \frac{E\pi^2NDd^2x}{8Mh^2} = \frac{E\pi^2NDd^2y}{8Mh^2}$$

Отсюда:

Ответ:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E\pi^2NDd^2}{8Mh^2}}$$

$$A = \frac{E\pi^2NDd^2}{8Mh^2}$$

A5^{0.50}

Выразите L_0 через y_0 , ω/ω_0 , Λ и ζ .

Воспользуемся методом комплексных амплитуд:

$$x_0(-\omega^2 + 2\zeta i\omega\omega_0 + \omega_0^2) = \omega_0^2y_0$$

Выразим $h_0 = x_0 - y_0$:

$$h_0 = y_0 \left(-1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\zeta i\omega\omega_0} \right)$$

Учитывая, что $L_0 = \Lambda h_0$, запишем ответ:

Ответ:

$$L_0 = \Lambda y_0 \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2i\zeta i\frac{\omega}{\omega_0}} \right) = \Lambda y_0 \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2i\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2i\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}$$

A6^{1.00}

Укажите соответствие между областями частот и режимами работы сенсора. Выразите K_s и K_a через M , h , N , D , d и E .

Рассмотрим поведение груза в низкочастотном пределе. Рассмотрим одну гармонику колебаний y . Упростим выражение для L_0 в пределе $\zeta\omega_0 \ll \omega \ll \omega_0$:

$$L_0 \approx \frac{\Lambda\omega^2y_0}{\omega_0^2},$$

что соответствует $L = -\frac{\Lambda\ddot{y}}{\omega_0^2}$. При сложении нескольких низкочастотных гармоник это соотношение все еще выполняется. Выразим K_a :

$$K_a = -\frac{\omega_0^2}{\Lambda} = \frac{E\pi d^2}{4Mh}$$

Теперь рассмотрим поведение груза в высокочастотном пределе. Аналогично рассмотрим одну гармонику колебаний y . Упростим выражение для L_0 в пределе $\omega \gg \omega_0$:

$$L_0 \approx -\Lambda y_0$$

При сложении нескольких высокочастотных гармоник это соотношение все еще выполняется. В этом случае $K_s = -\frac{1}{\Lambda} = \frac{2h}{N\pi D}$.

Ответ: При $\zeta\omega_0 \ll \omega \ll \omega_0$ сенсор работает как акселерометр, а при $\omega \gg \omega_0$ - как сейсмограф.

$$K_s = \frac{2h}{N\pi D}$$

$$K_a = \frac{E\pi d^2}{4Mh}$$

A7^{0.40}

Вычислите значения K_a и ω_0 .

Ответ:

$$K_a = 3.44 \cdot 10^4 \text{ c}^{-2}$$

$$\omega_0 = 2750 \text{ рад/с}$$

В1 1.00 Выразите интенсивность света I , падающего на фотодиод, через δL , I_0 , λ , n , r и φ_0 .

Здесь φ_0 — набегающая разность фаз между светом, проходящим сквозь волокно, намотанное на правую и левую опоры соответственно, при $\delta L = 0$.

Примечание. Можете не следить за знаком φ_0 . Иными словами, решения, отличающиеся заменой $\varphi_0 \rightarrow -\varphi_0$, считаются эквивалентными.

На разветвитель после прохождения через интерферометр приходят волны с комплексными амплитудами

$$\frac{ri}{\sqrt{2}}E_0e^{2ikn\,\delta L+i\varphi_0} \quad \text{и} \quad \frac{r}{\sqrt{2}}E_0e^{-2ikn\,\delta L},$$

поэтому в сумме

$$\begin{aligned} E &= \frac{ri}{2}E_0e^{2ikn\,\delta L+i\varphi_0} - \frac{ri}{2}E_0e^{-2ikn\,\delta L} = -\frac{riE_0}{2}\left(e^{2ikn\,\delta L+i\varphi_0+i\pi} + e^{-2ikn\,\delta L}\right) = \\ &= -\frac{riE_0}{2}\left(e^{2ikn\,\delta L+i\varphi_0/2+i\pi/2} + e^{-2ikn\,\delta L-i\varphi_0/2-i\pi/2}\right)e^{i\varphi_0/2+i\pi/2} = -riE_0\cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}n\delta L + \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$I = EE^* = r^2I_0\sin^2\left(\frac{4\pi}{\lambda}n\delta L + \frac{\varphi_0}{2}\right)$$

Ответ:

$$I = r^2I_0\sin^2\left(\frac{4\pi}{\lambda}n\delta L + \frac{\varphi_0}{2}\right)$$

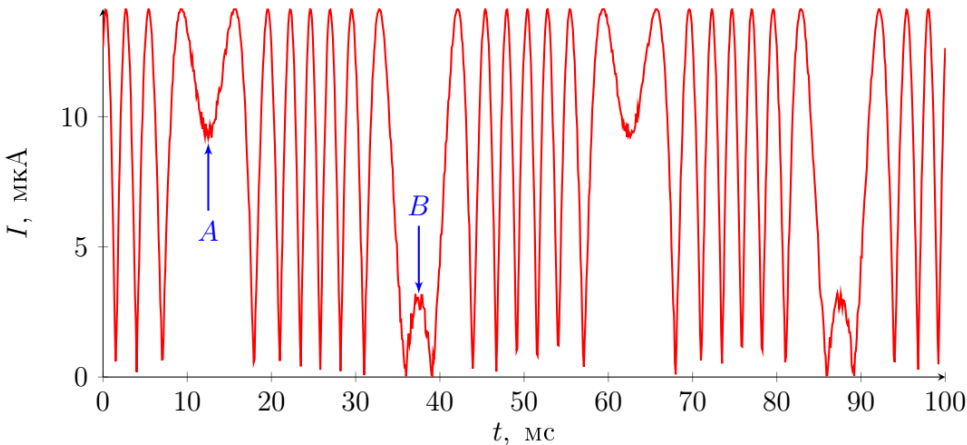
В2 1.50 Определите численные значения Y и f .

Период колебаний картины равен $T = 63 \text{ мс} - 13 \text{ мс} = 50 \text{ мс}$, отсюда:

Ответ:

$$f = 20 \text{ Гц}$$

Половине периода колебаний соответствует изменение $\ddot{y}$ от $-(2\pi f)^2Y$ до $(2\pi f)^2Y$.



Допустим аргумент x у функции $\sin^2(x)$, описывающей интенсивность света в точке A находится в интервале $(0, \pi/2)$. Тогда в точке с практически нулевым током слева от B он равен 7π . Амплитуда колебаний тока составляет $I_o = 14.2 \text{ мкА}$. Значения тока в точках A и B : $I_A = 9.7 \text{ мкА}$, $I_B = 3.2 \text{ мкА}$.

Значит $x_B - x_A = 7\pi + \arcsin(\sqrt{I_B/I_o}) - \arcsin(\sqrt{I_A/I_o}) = 21.5$. В итоге,

$$x_B - x_A = \frac{4\pi}{\lambda}(\delta L_B - \delta L_A) = \frac{4\pi n}{\lambda} \cdot 2 \frac{(2\pi f)^2 Y}{K_a} \Rightarrow Y = (x_B - x_A) \frac{\lambda K_a}{32\pi^3 n f^2} = 1.46 \text{ мкм}$$

Ответ:

$$Y = 1.46 \text{ мкм}$$

B3^{0.30} Пользуясь теоремой о равномерном распределении энергии по степеням свободы, запишите выражение для $\langle \delta L^2 \rangle$ — флуктуаций δL при комнатной температуре. Ответ выразите через постоянную Больцмана k_B , T , E , D , N и d .

У описываемой системы одна степень свободы, но энергия деформации у двух опор складывается, поэтому

$$2\langle W \rangle = \frac{1}{2}k_B T \Rightarrow \langle \delta h^2 \rangle = k_B T \frac{8h^2}{E\pi^2 N D d^2}$$

Учитывая что $\langle \delta L^2 \rangle = \Lambda^2 \langle \delta h^2 \rangle$, получаем

$$\langle \delta L^2 \rangle = 2k_B T \frac{ND}{Ed^2}$$

Ответ:

$$\langle \delta L^2 \rangle = 2k_B T \frac{ND}{Ed^2}$$

B4^{0.60} Если температура этого участка оптического волокна отличается от комнатной на малую величину ΔT_i , то при прохождении света через него набегают фаза $\varphi_i \neq \varphi_{i,0}$.

Выразите $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i,0}$ через ΔT_i , ΔL_i , α , β , n и λ .

$$\Delta\varphi_i = \frac{2\pi}{\lambda}(n + \beta\Delta T_i)\Delta L_i(1 + \alpha\Delta T_i) - \frac{2\pi}{\lambda}n\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda}(n\alpha + \beta)\Delta L_i\Delta T_i$$

Ответ:

$$\Delta\varphi_i = \frac{2\pi}{\lambda}(n\alpha + \beta)\Delta L_i\Delta T_i$$

B5^{0.70} Выразите $\langle \Delta\Phi^2 \rangle$ через $\langle \Delta T^2 \rangle$, ΔL , L , n , α , β и λ .

Вычислим $\langle \Delta\Phi^2 \rangle$ напрямую:

$$\langle \Delta\Phi^2 \rangle = \left\langle \left(\sum \Delta\varphi_i \right)^2 \right\rangle = \left(\frac{2\pi}{\lambda}(n\alpha + \beta)\Delta L \right)^2 \left\langle \left(\sum \Delta T_i \right)^2 \right\rangle$$

Пользуясь свойствами ΔT_i ,

$$\left\langle \left(\sum \Delta T_i \right)^2 \right\rangle = \left\langle \sum \Delta T_i^2 \right\rangle + \left\langle \sum \Delta T_i \Delta T_j \right\rangle = p\langle \Delta T^2 \rangle = \frac{L}{\Delta L}\langle \Delta T^2 \rangle.$$

Ответ:

$$\langle \Delta\Phi^2 \rangle = \left(\frac{2\pi}{\lambda}(n\alpha + \beta) \right)^2 L \Delta L \langle \Delta T^2 \rangle$$

B6^{1.00} Выразите $\langle \Delta\Psi^2 \rangle$ через $\langle \Delta\Phi^2 \rangle$.

Температурные колебания, описанные ранее являются значительно более медленным процессом, чем распространение света, поэтому для любого $\Delta\Phi$ выполняется, что

$$\Delta\Psi = 2\Delta\Phi \Rightarrow \langle \Delta\Psi^2 \rangle = 4\langle \Delta\Phi^2 \rangle$$

Обратите внимание, что ответ отличается в 2 раза от распространения по волокну длиной $2L$!

Ответ:

$$\langle \Delta\Psi^2 \rangle = 4\langle \Delta\Phi^2 \rangle$$

B7^{0.60} Найдите среднеквадратичную разность изменений набега фазы на двух плечах интерферометра $\langle (\Delta\Psi_1 - \Delta\Psi_2)^2 \rangle$. Ответ выразите через $\langle \Delta\Psi^2 \rangle$.

Набег фазы на обоих интерферометрах является независимым, поэтому

$$\langle (\Delta \Psi_1 - \Delta \Psi_2)^2 \rangle = \langle \Delta \Psi_1^2 \rangle + \langle \Delta \Psi_2^2 \rangle = 2 \langle \Delta \Psi^2 \rangle$$

Ответ:

$$\langle (\Delta \Psi_1 - \Delta \Psi_2)^2 \rangle = 2 \langle \Delta \Psi^2 \rangle$$

B8 1.00 Считайте, что сенсор работает при $T = 305 \text{ K}$, а величина температурных флуктуаций $\langle \Delta T^2 \rangle$ составляет $1.0 \cdot 10^{-6} \text{ K}^2$. Какое минимальное ускорение $a_{\min}$ возможно измерить с помощью предложенного сенсора?

Из-за тепловых флуктуаций в механической системы длина плеч интерферометра имеет шум

$$\sqrt{\langle \delta L^2 \rangle} = \sqrt{2k_B T \frac{ND}{Ed^2}} = 7.1 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

Из-за тепловых флуктуаций в волокне разность фаз имеет шум

$$\sqrt{\langle (\Delta \Psi_1 - \Delta \Psi_2)^2 \rangle} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{\lambda} (n\alpha + \beta) \sqrt{\pi DN \Delta L} \cdot \sqrt{\langle \Delta T^2 \rangle} = 2 \cdot 10^{-3},$$

что приводит к шуму в вычисляемой δL равному $\frac{\lambda}{8\pi n} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0.6 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Таким образом, вклад от второго эффекта на порядок больше, и минимальное возможное ускорение:

Ответ:

$$a_{\min} \approx K_a \cdot 0.6 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$$