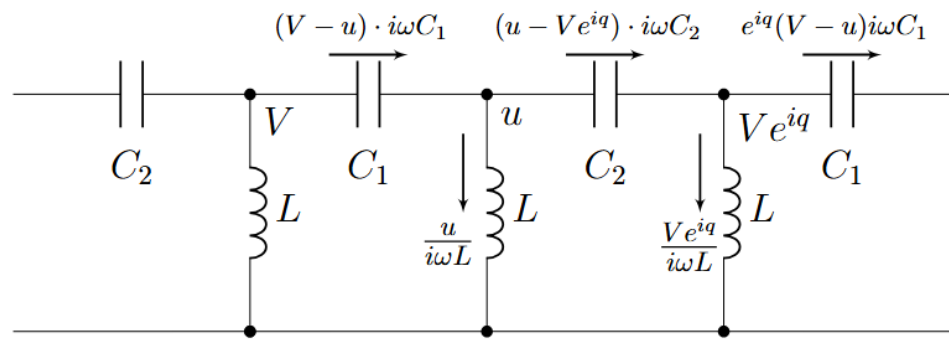


A1^{0.40}

Используя правила Кирхгофа, получите систему уравнений, связывающую V , u и q . Ответ выразите через V , u , q , L , C_1 , C_2 и ω .

Найдём токи, текущие в звеньях, зная, что в точке, расположенной справа от точки C потенциал равен ue^{iq} .



Теперь запишем первое правило Кирхгофа для узлов с потенциалами u и Ve^{iq} соответственно

$$\begin{cases} (V - u) \cdot i\omega C_1 = (u - Ve^{iq}) \cdot i\omega C_2 + \frac{u}{i\omega L}, \\ (u - Ve^{iq}) \cdot i\omega C_2 = e^{iq}(V - u) \cdot i\omega C_1 + \frac{Ve^{iq}}{i\omega L}. \end{cases}$$

Полученной системы уравнений достаточно, чтобы получить выражение для $\cos q(\omega)$.

A2^{0.80}

Из полученной системы выразите $\cos q$ через ω , L , C_1 и C_2 .

Метод 1. Из обоих уравнений выразим $\frac{u}{V}$ и приравняем их.

Получим из 1 и 2 уравнений соответственно:

$$\begin{cases} \frac{u}{V} = \frac{e^{iq} \cdot i\omega C_2 + i\omega C_1}{i\omega \cdot \left(C_1 + C_2 - \frac{1}{\omega^2 L} \right)}, \\ \frac{u}{V} = \frac{e^{iq} \cdot i\omega \cdot \left(C_1 + C_2 - \frac{1}{\omega^2 L} \right)}{e^{iq} \cdot i\omega C_1 + i\omega C_2}, \end{cases}$$

откуда, приравнявая $\frac{u}{V}$ из разных уравнений друг другу и сокращая на $i\omega$, получим уравнение, содержащее только неизвестную q :

$$(e^{iq} C_2 + C_1) (e^{iq} C_1 + C_2) = e^{iq} \left(C_1 + C_2 - \frac{1}{\omega^2 L} \right)^2.$$

Теперь раскроем скобки слева и поделим обе части уравнения на e^{iq} :

$$C_1^2 + C_2^2 + C_1 C_2 (e^{iq} + e^{-iq}) = \left(C_1 + C_2 - \frac{1}{\omega^2 L} \right)^2.$$

Учитывая, что $e^{iq} + e^{-iq} = 2 \cos(q)$, получаем соотношение на $\cos q$

$$\cos q = \frac{\left(C_1 + C_2 - \frac{1}{\omega^2 L} \right)^2 - C_1^2 - C_2^2}{2 \cdot C_1 C_2}.$$

Метод 2. На самом деле, быстрее поступить немного иначе. Запишем систему уравнений как линейную относительно V и u ,

$$\begin{cases} V (C_1 + C_2 e^{iq}) + u \left(-C_1 - C_2 + \frac{1}{\omega^2 L} \right) = 0, \\ V \left(-C_1 - C_2 + \frac{1}{\omega^2 L} \right) + u (C_1 + C_2 e^{-iq}) = 0. \end{cases}$$

Чтобы система имела нетривиальное решение (их бесконечное количество), необходимо и достаточно приравнять нулю главный определитель системы. Таким образом,

$$(C_1 + C_2 e^{iq}) (C_1 + C_2 e^{-iq}) = \left(C_1 + C_2 - \frac{1}{\omega^2 L} \right)^2.$$

Окончательно,

$$\cos q = \frac{\left(C_1 + C_2 - \frac{1}{\omega^2 L} \right)^2 - C_1^2 - C_2^2}{2 \cdot C_1 C_2}.$$

Первый способ. Приведем выражение для $\cos q$

$$\cos q = 1 - \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \cdot \frac{1}{\omega^2 L} + \frac{1}{2C_1 C_2} \cdot \left(\frac{1}{\omega^2 L} \right)^2$$

Решим два квадратных неравенства

1.

$$\begin{aligned} \cos q &> 1; \\ -\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \cdot \frac{1}{\omega^2 L} + \frac{1}{2C_1 C_2} \cdot \left(\frac{1}{\omega^2 L} \right)^2 &> 0; \\ \frac{1}{\omega^2 L} \left(\frac{1}{\omega^2 L} - 2(C_1 + C_2) \right) &> 0; \\ \frac{1}{\omega^2 L} &\in (-\infty; 0) \cup (2(C_1 + C_2); +\infty); \\ \omega^2 L &\in \left(0; \frac{1}{2(C_1 + C_2)} \right) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \cos q &< -1; \\ 2 - \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \cdot \frac{1}{\omega^2 L} + \frac{1}{2C_1 C_2} \cdot \left(\frac{1}{\omega^2 L} \right)^2 &< 0; \\ \left(\frac{1}{\omega^2 L} \right)^2 - 2(C_1 + C_2) \cdot \frac{1}{\omega^2 L} + 4C_1 C_2 &< 0; \\ \left(\frac{1}{\omega^2 L} - 2C_1 \right) \left(\frac{1}{\omega^2 L} - 2C_2 \right) &< 0; \\ \frac{1}{\omega^2 L} &\in (2C_1; 2C_2); \\ \omega^2 L &\in \left(\frac{1}{2C_1}; \frac{1}{2C_2} \right) \end{aligned}$$

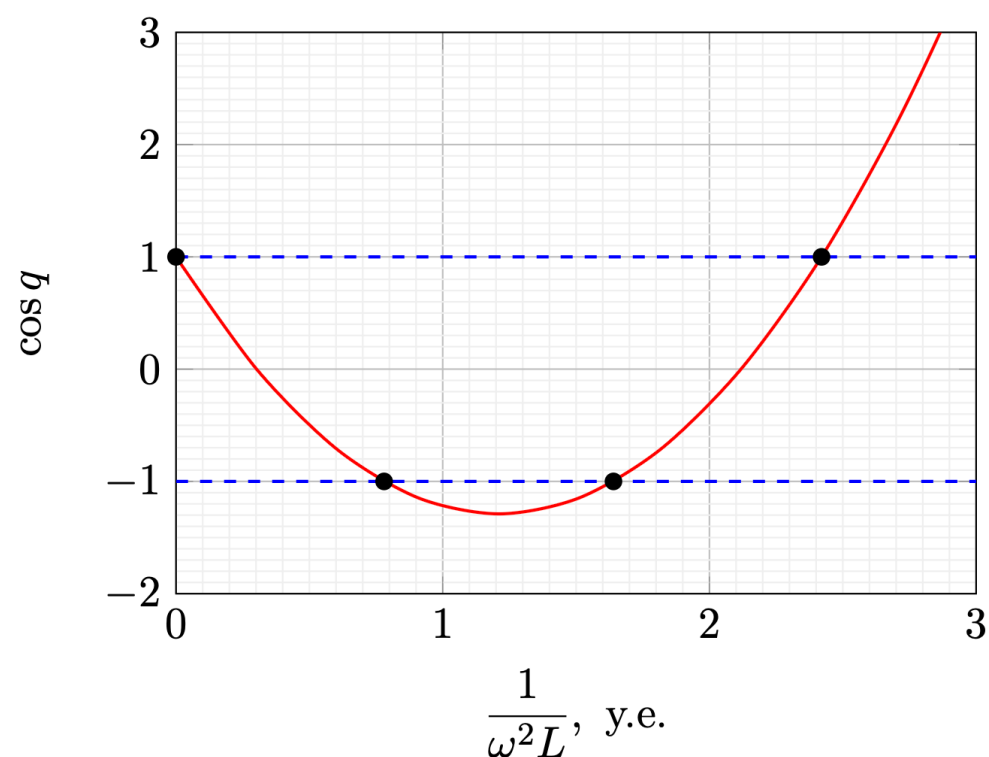
Из объединения системы неравенств получаем конечный ответ

$$\omega \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2(C_1 + C_2)L}} \right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2C_2L}}; \frac{1}{\sqrt{2C_1L}} \right).$$

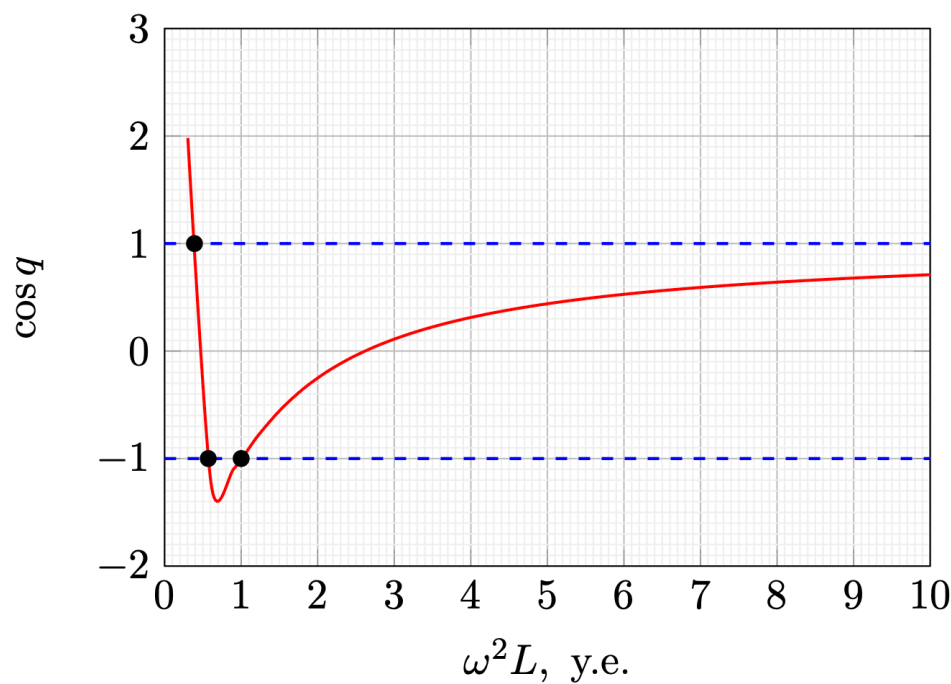
Второй способ. Запишем выражение для $x = \cos q$

$$x = 1 - \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \cdot \frac{1}{\omega^2 L} + \frac{1}{2C_1 C_2} \cdot \frac{1}{\omega^4 L^2}.$$

Получаем, что зависимость $x\left(\frac{1}{\omega^2 L}\right)$ квадратичная, построим ее график качественный график, на котором отметим точки пересечения с прямыми $\cos q = 1$ и $\cos q = -1$.



Полученный график можно качественно перестроить в осях $y = \cos q$, $x = \omega^2 L$, сохранив все экстремумы и преобразовав ось x .



Введем обозначения соответствующие координатам x точке пересечения построенного графика с прямыми $\cos q = 1$, $\cos q = -1$. В точке пересечения графика с $\cos q = 1$, $\omega = \omega_1$. В точке пересечения графика с $\cos q = -1$, $\omega = \omega_2$ и $\omega = \omega_3$. Составим и решим квадратные уравнения относительно $\frac{1}{\omega^2 L}$

1.

$$\begin{aligned} \cos q &= 1; \\ -\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \cdot \frac{1}{\omega^2 L} + \frac{1}{2C_1 C_2} \cdot \left(\frac{1}{\omega^2 L}\right)^2 &= 0; \\ \frac{1}{\omega^2 L} \left(\frac{1}{\omega^2 L} - 2(C_1 + C_2)\right) &= 0; \\ \frac{1}{\omega^2 L} = 2(C_1 + C_2) \text{ или } \frac{1}{\omega^2 L} &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \cos q &= -1; \\ 2 - \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \cdot \frac{1}{\omega^2 L} + \frac{1}{2C_1 C_2} \cdot \left(\frac{1}{\omega^2 L}\right)^2 &= 0; \\ \left(\frac{1}{\omega^2 L}\right)^2 - 2(C_1 + C_2) \cdot \frac{1}{\omega^2 L} + 4C_1 C_2 &= 0; \\ \left(\frac{1}{\omega^2 L} - 2C_1\right) \left(\frac{1}{\omega^2 L} - 2C_2\right) &= 0; \\ \frac{1}{\omega^2 L} = 2C_1 \text{ или } \frac{1}{\omega^2 L} &= 2C_2 \end{aligned}$$

Сопоставляя решения уравнений с графиком получаем ответ

$$\omega \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2(C_1 + C_2)L}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2C_2L}}; \frac{1}{\sqrt{2C_1L}}\right).$$

А4 1.50 Измерьте зависимость действительной и мнимой составляющей волнового вектора $\Re(q)$ и $\Im(q)$ от частоты f . Опишите методику измерений. Измерения проводите в диапазоне частот от 650 кГц до 1300 кГц с шагом 50 кГц. Для каждой частоты f необходимо получить значение и $\Re(q)$, и $\Im(q)$.

Подключим генератор к цепи согласно инструкции в условии. С помощью двух каналов осциллографа будем измерять удвоенную амплитуду напряжения на генераторе U_0 и удвоенную амплитуду напряжения на первом звене U_1 .

По сдвигу фаз сигналов на осциллографе будем измерять $\Re(q)$

$$\Re(q) = 2\pi f \Delta T$$

По отношению амплитуд на сигналах будем измерять $\Im(q)$

$$\Im(q) = \ln \frac{U_0}{U_1}$$

Примечание. При проведении измерений в диапазоне частот $f \in [770; 890]$ кГц цепь находится в проводящем состоянии (соответствует диапазону частот $f \in \left(\frac{1}{\sqrt{2(C_1 + C_2)L}}; \frac{1}{\sqrt{2C_2L}}\right)$), поэтому при измерениях можно заметить влияние отраженной волны. При линейаризации эти точки будут давать выбросы.

f , кГц	ΔT , нс	U_0 , мВ	U_1 , мВ	$\Re(q)$	$\Im(q)$	f^{-2} , 10^{-12} с ²	$\Re(\cos q)$	$(1 - \cos q) \cdot f^2$, 10^{12} Гц ²
650	0	57.6	8	0.00	-1.97	2.37	3.67	-1.13
700	32	128	34.4	0.14	-1.31	2.04	1.98	-0.48
750	216	284	408	1.02	0.36	1.78	0.56	0.25
800	452	616	416	2.27	-0.39	1.56	-0.70	1.09
850	396	328	172	2.11	-0.65	1.38	-0.63	1.18

900	480	304	212	2.71	-0.36	1.23	-0.97	1.60
950	516	252	134	3.08	-0.63	1.11	-1.21	1.99
1000	496	232	112	3.12	-0.73	1.00	-1.28	2.28
1050	484	232	110	3.19	-0.75	0.91	-1.29	2.53
1100	460	244	120	3.18	-0.71	0.83	-1.26	2.74
1150	436	268	142	3.15	-0.64	0.76	-1.21	2.92
1200	416	304	182	3.14	-0.51	0.69	-1.13	3.07
1250	396	368	264	3.11	-0.33	0.64	-1.06	3.21
1300	388	520	464	3.17	-0.11	0.59	-1.01	3.39

A5 ^{1.00} Линеаризуйте зависимость $\Re(\cos q)$ от частоты генератора f и определите коэффициенты линейной зависимости.

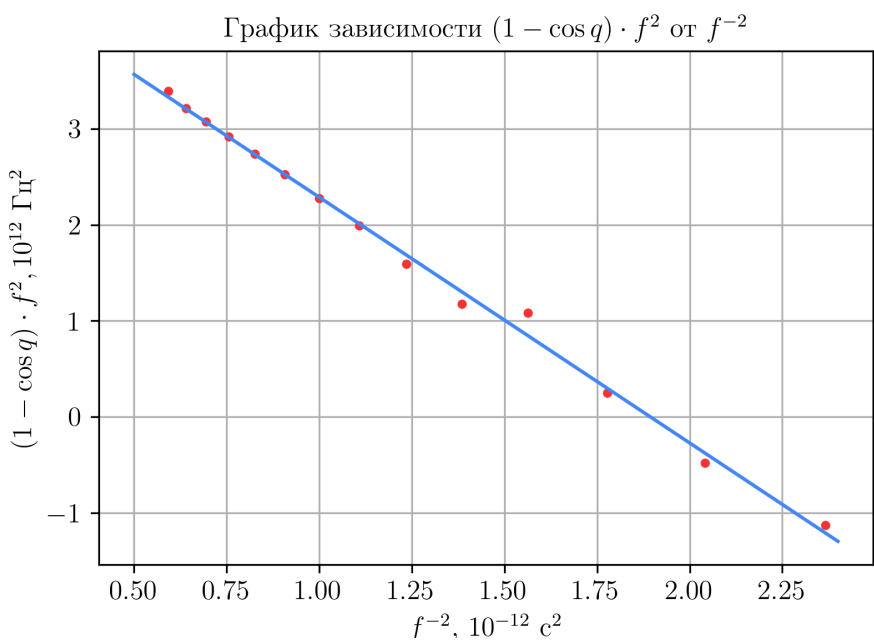
Используя результат прошлых пунктов

$$\cos q = 1 - \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \cdot \frac{1}{\omega^2 L} + \frac{1}{2C_1 C_2} \cdot \frac{1}{\omega^4 L^2}.$$

Преобразуя выражение получаем линеаризацию $(1 - \cos q) \cdot \omega^2 L$ от $\frac{1}{\omega^2 L}$

$$(1 - \cos q) \cdot \omega^2 L = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} - \frac{1}{2C_1 C_2} \cdot \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Линеаризуем зависимость и построим график.



Параметры линейной зависимости (угловой коэффициент и показатель сдвига соответственно)

$$k = -2.58 \cdot 10^{24} \text{ Гц}^4, \quad b = 4.86 \cdot 10^{12} \text{ Гц}^2.$$

A6 ^{0.70} Используя коэффициенты, найденные в A5, определите ёмкости конденсаторов C_1 и C_2 ($C_1 < C_2$).

Согласно теории,

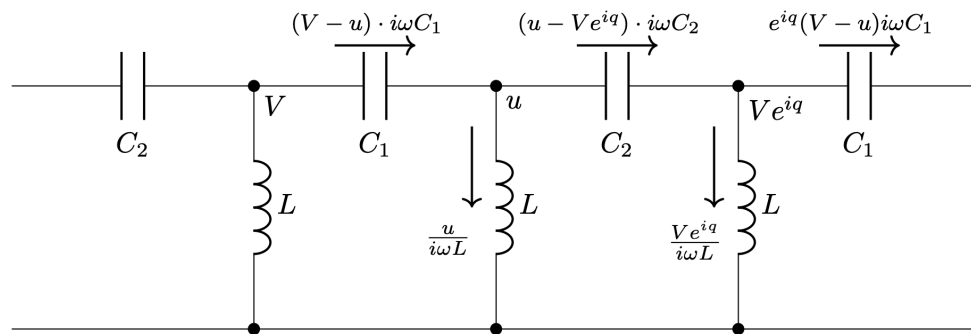
$$k = -\frac{(2\pi)^2}{2L^2} \cdot \frac{1}{C_1 C_2}, \quad b = \frac{(2\pi)^2}{L} \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}.$$

Откуда получаем (воспользовавшись, например, теоремой Виета для квадратного уравнения, корни которого — обратные емкости)

$$\begin{aligned} C_1 &= 0.43 \text{ нФ}, \\ C_2 &= 0.89 \text{ нФ}. \end{aligned}$$

B1 ^{0.80} Выразите импедансы z_r и z_l для волн, бегущих вправо и влево. Ответ выразите через C_1 , C_2 , L , q и ω .

Расставим токи и потенциалы в цепи аналогично части А



Тогда запишем волновой импеданс z_r для волны, бегущей вправо

$$z_r = \frac{V}{I} = \frac{V}{V-u} \cdot \frac{1}{i\omega C_1}.$$

Подставим соотношение для $\frac{u}{V}$, полученное в части А

$$z_r = \frac{1}{1 - \frac{C_1 + C_2 e^{iq}}{C_1 + C_2 - \frac{1}{\omega^2 L}}} \cdot \frac{1}{i\omega C_1} = \frac{C_1 + C_2 - \frac{1}{\omega^2 L}}{C_2(1 - e^{iq}) - \frac{1}{\omega^2 L}} \cdot \frac{1}{i\omega C_1}.$$

Выражение для z_l можно получить используя замену $q \rightarrow -q$

$$z_l = \frac{C_1 + C_2 - \frac{1}{\omega^2 L}}{C_2(1 - e^{-iq}) - \frac{1}{\omega^2 L}} \cdot \frac{1}{i\omega C_1}.$$

В2 0.60 Запишите граничное условие, связывающие комплексные амплитуды напряжений $V_r(0, t)$ и $V_l(0, t)$. В ответе получите уравнение, содержащее $V_r(0, t)$, $V_l(0, t)$, z_r , z_l , q и N .

Запишем граничное условие для тока вытекающего из звена в цепи с номером N

$$I_r(N, t) + I_l(N, t) = 0.$$

Выразим токи каждой из волн через соответствующие напряжения на нулевом звене

$$\frac{V_r(0, t)e^{iqN}}{z_r} + \frac{V_l(0, t)e^{-iqN}}{z_l} = 0,$$

$$V_l(0, t) = -\frac{z_l}{z_r} V_r(0, t)e^{2iqN}.$$

В3 1.20 Получите выражение для модуля полного импеданса цепи $|z|$, состоящей из N звеньев. Ответ выразите через N , q и $|z_r|$.

Напишем выражение для полного импеданса цепи подставляя амплитуду напряжения и тока как суммы амплитуд напряжения и тока двух волн

$$z = \frac{V_r(0, t) + V_l(0, t)}{I_r(0, t) + I_l(0, t)} = \frac{V_r(0, t) + V_l(0, t)}{\frac{V_r(0, t)}{z_r} + \frac{V_l(0, t)}{z_l}}.$$

Подставим полученные соотношения на амплитуды напряжений волн

$$z = \frac{1 - \frac{z_l}{z_r} e^{2iqN}}{\frac{1}{z_r} + \frac{1}{z_l} \left(-\frac{z_l}{z_r} e^{2iqN} \right)} = \frac{z_r - z_l e^{2iqN}}{1 - e^{2iqN}}.$$

Подставим соотношение на импедансы и пренебрежем $\frac{1}{\omega^2 L}$

$$z = z_r \frac{1 - \frac{C_2(1 - e^{iq}) - \frac{1}{\omega^2 L}}{C_2(1 - e^{-iq}) - \frac{1}{\omega^2 L}} \cdot e^{2iqN}}{1 - e^{2iqN}} = z_r \frac{1 - \frac{1 - e^{iq}}{1 - e^{-iq}} \cdot e^{2iqN}}{1 - e^{2iqN}} = z_r \frac{1 + e^{2iq(N + \frac{1}{2})}}{1 - e^{2iqN}}.$$

Возьмем модуль от полученного выражения

$$|z| = |z_r| \frac{\cos \left(q \left(N + \frac{1}{2} \right) \right)}{\sin(qN)}.$$

В4 0.60 Используя результаты, полученные в части А, напишите уравнение на частоты, при которых достигается максимум модуля импеданса. Ответ выразите через N , C_1 , C_2 , L , ω и целочисленный параметр m .

Максимум модуля достигается при $qN = \pi \Delta n$. Получим выражение на частоты, при которых достигаются экстремумы импеданса

$$\arccos\left(\frac{1}{2C_1C_2}\left(\frac{1}{\omega^2L}-(C_1+C_2)\right)^2-(C_1^2+C_2^2)\right)=\frac{\pi\Delta n}{N}.$$

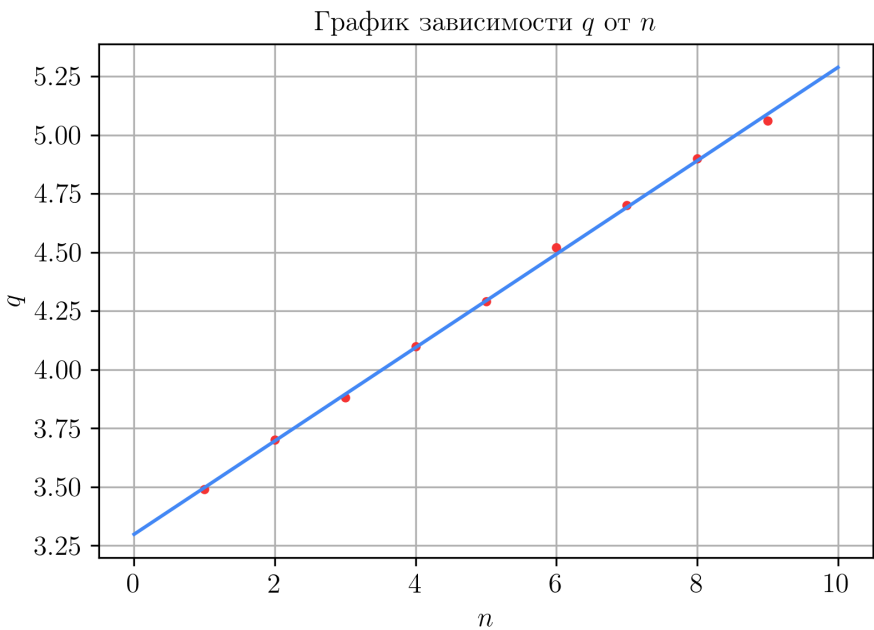
B5^{1.00} Измерьте частоты, при которых реализуется максимум модуля импеданса. Измерения следует проводить на частотах $1400\text{ кГц} < f < 6000\text{ кГц}$, при которых LC-контур переходит в зону проводимости.

Подключимся к плате согласно условию, будем измерять частоты, при которых достигается минимум амплитуды напряжения на резисторе. Сигнал на резисторе получим, используя режим осциллографа **math**, вычитая из сигнала, снимаемого с генератора, сигнал, снимаемый на контактах **J2-GND**.

n	$f_{rez}, \text{ кГц}$	q
1	1466	3.49
2	1590	3.70
3	1717	3.88
4	1920	4.10
5	2137	4.29
6	2489	4.52
7	2899	4.70
8	3579	4.90
9	4549	5.06

B6^{0.80} Линеаризуйте зависимость, измеренную в пункте B5, и постройте линеаризованный график, из которого определите количество звеньев в цепи N .

Построим зависимость $q = 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{2C_1C_2}\left(\frac{1}{\omega^2L}-(C_1+C_2)\right)^2-(C_1^2+C_2^2)\right)$ от n .



Угловой коэффициент равен $k = 0.198$, откуда $N = 15.9 \approx 16$.