

2017年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(一)試題

2017年4月1日 08:10-12:10

- 一、 本試題共五大題，每一題 20 分，合計 100 分。
- 二、 考試時間四小時。
- 三、 在指定的答案紙上作答。
- 四、 可使用無程式掌上型計算機。

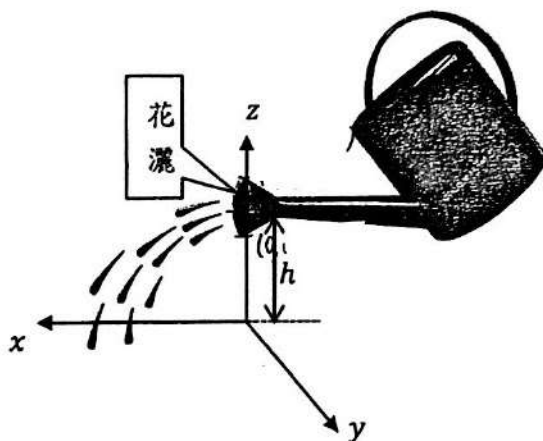
2017 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(一)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、澆水問題

考慮一個澆水桶，假設其花灑為一圓形平面，半徑為 a 。以鉛直軸為 z 軸，固定花灑平面，使其垂直線在水平方向，設為 x 軸，另一水平軸設為 y 軸，如圖一所示。設花灑的圓心固定於 $(0,0,h)$ ，地面為 $x-y$ 平面。

假設花灑所射出之水線均勻分布於花灑圓形平面上，每單位面積每秒總水量記為 I 。而離開花灑時，平面上各處的水線速度是一個定值 v ，方向為 $+x$ 方向。假設水線不會交錯，且空氣阻力可忽略。



圖一

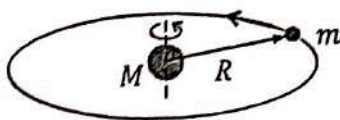
- (A). 假設水落於地上後不再彈起，求地面上落水區的邊界所滿足的方程式。
- (B). 在地面上落水區內，每單位面積每秒的落水量可以寫成 $I \cdot f(x', y')$ ，在此 x', y' 為地面上的座標，求函數 $f(x', y')$ 。
- (C). 在 $x = d$ 處豎立一平行於 $y-z$ 平面的鉛直隔牆，隔牆的上緣滿足 $z = h + cy$ ，隔牆會將水遮蔽，計算此時在地面的總落水量。此時地面上的落水區會出現一條新的邊界，此邊界的座標滿足什麼方程式？若連續增加 d 至 d_0 ，灑水就完全被擋住，求 d_0 。
- (D). 若有沿 y 方向的強風吹起，對水線會沿 y 方向施以一定力，設力對水線的效果等效於沿 y 方向的一等加速度 b 。求此時地面上落水處的邊界所滿足的方程式。
- (E). 承(D)小題，地面上有落水處，每單位面積每秒的落水量可以寫成 $I \cdot h(x', y')$ ， x', y' 為地面上的座標，求函數 $h(x', y')$ 。

二、星球與衛星的自旋軌道共振

眾所皆知，月球的自轉週期與繞地球的公轉週期一樣(約 27.32 日)，造成月球永遠以其中一面面向地球。一般認為，月球與地球之潮汐的交互作用是主要原因之一。然而最一般的原因則與月球軌道的離心率以及月球本身形狀與球面的偏離率(asphericity)有關，本問題探討一非球形衛星繞行一球形星球之運動。

(A)一可視為質點之衛星以圓形軌道繞行一靜止的星球，衛星與星球的質量各為 m 與 M ，

如圖二，星球可視為一均勻球體，且對垂直圓形軌道之中心軸自轉，其自轉的轉動慣量為 I 。假設因衛星在星球上造成的潮汐產升摩擦使得衛星與星球之總能量逐漸變小，當衛星相對星球中心之軌道角動量為 ℓ 時，設衛星與星球的總角動量為 L ，回答以下問題：

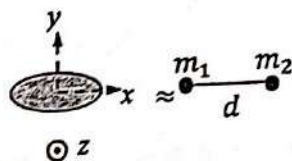


圖二

(i)試求總能量 $E(\ell)$ ，(以 G, m, M, I 與 L 表示)。若系統能達到穩定態，由此求出達到穩定態時，衛星軌道角速度 ω 與星球自轉角速度 Ω 之比。

(ii)試求能達到平衡所需總角動量量值之最小值。

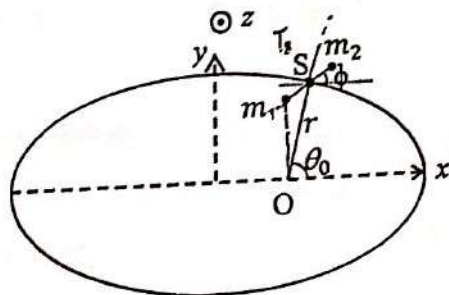
(B)實際上的衛星不是球形，因此不可視為質點。假設衛星的形狀為沿著 x 軸拉長的橄欖球形(如圖三所示)，此時衛星對 x 軸的轉動慣量 I_x 與對 y 軸的轉動慣量 I_y 之差異可以將其視為距離固定為 d 、質量各為 m_1 與 m_2 之兩個質點



圖三

的組合，即 $m = m_1 + m_2$ 且 $I_y - I_x = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2$ ，

而衛星對 z 軸的轉動慣量則為 I_z 。如圖四所示，在本問題中，行星視為質點固定在 O 點，衛星則可視為兩質點組合在 xy 平面上運動，並假設衛星的轉動對其質心運動之擾動可被忽略，因此衛星的質心運動可視為已知。設 O 點到衛星質心 S 之距離為 r 時，衛星中心軸與 x 軸夾角為 ϕ ， r 與 x 軸夾角為 θ_0 ，若 $r \gg d$ ，試分析衛星的轉動：



圖四

(i)設衛星與星球的總角動量為 L ，衛星轉動的角速度為 ϕ ，若位能展開到 $\frac{d^2}{r^3}$ ，而轉

動動能忽略 $\frac{d^2}{r^2}$ 與 $\frac{d^4}{r^2}$ 等高次項，試求與衛星轉動有關的總力學能，並由此求出衛星轉

動的角加速度。(以 $G, m, M, r, \phi, \theta_0, I_x, I_y$ 與 I_z 表示)

註：(1) 若 $x \ll 1$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \cong 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}$ 。

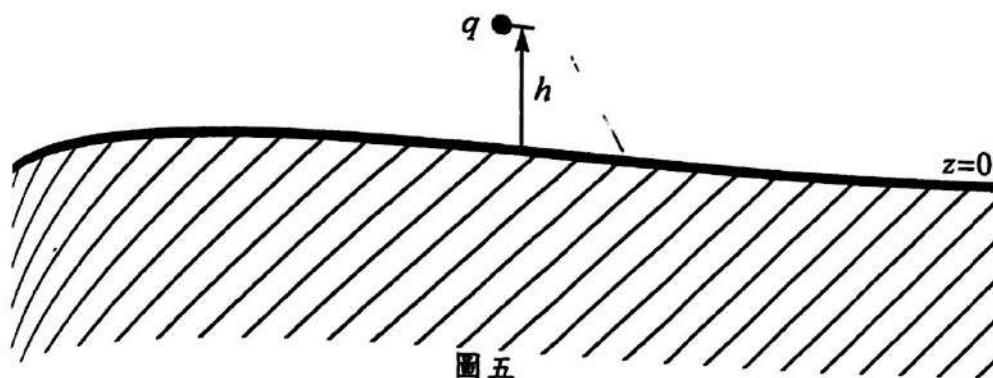
(2) 一個物理量 O 在一個週期 T 之平均值定為 $\langle O \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt O(t)$ 。

(3) 若 $x \ll 1$, 精確到 x 的一次方, $\sin x = x, \cos x = 1$ 。

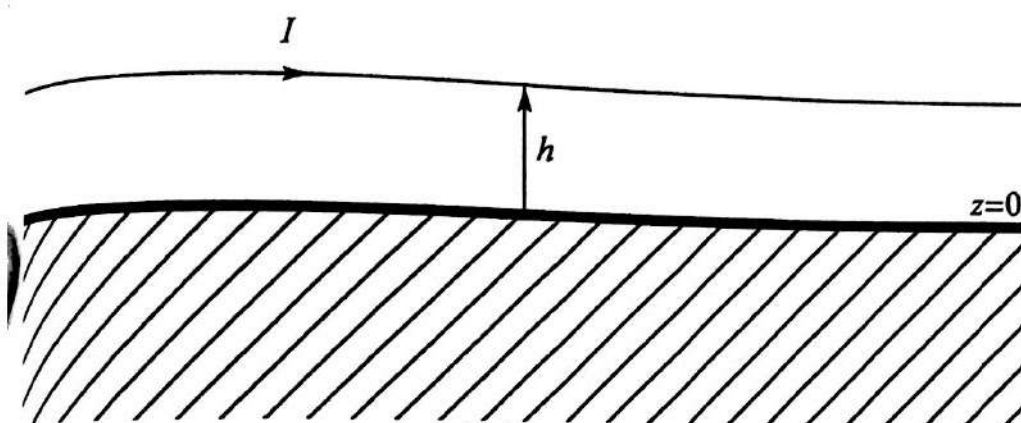
(4) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ 。

(ii) 已知衛星質心的軌道近似為一長軸為 a 、離心率為 e 之橢圓，距離 r 的軌跡方程式為 $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta_0}$ ，因此衛星質心的角動量可視為固定的常數。若離心率 e 很小，即 $0 < e \ll 1$ ，質心運動之角速度在一個週期的平均值為 ω_0 ，設時間 $t = 0$ 時，衛星與星球相距最近， $\theta_0 = 0$ ，試求精確到 e 的一次方之衛星轉動的角加速度(表示為三角函數 $\sin$ 的組合)。(以 $G, M, \phi, \omega_0, t, I_x, I_y$ 與 I_z 表示)

三、鏡像法



圖五

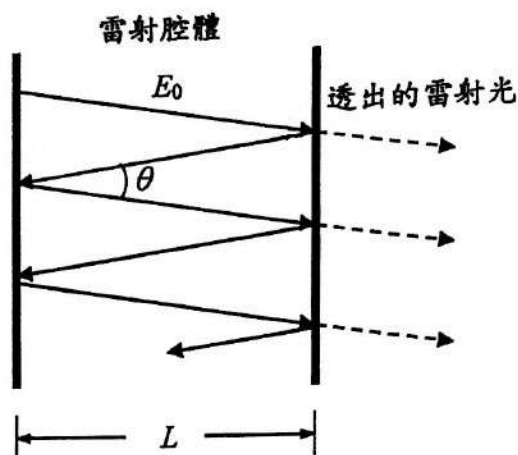


圖六

- (A). 如圖五所示，考慮位於 $h/2$ ($d > 0$) 的點電荷 q 。已知在平衡狀態時理想導體內部的靜電場及其表面切線方向的靜電場皆為零。證明若導體外的電場($z > 0$)係由原電荷與位於 $-h/2$ 處的鏡像電荷 $-q$ 疊加而成，則此合成的電場在理想導體表面恰好可滿足前述的物理條件。
- (B). 承(A)小題，由高斯定律求導體表面的感應面電荷密度。
- (C). 求電荷 q 與理想導體間的作用力及位能。
- (D). 在超導體除了電阻會降為零之外，另外還會有所謂的 Meissner 效應，在平衡狀態時超導體內部的靜磁場及其表面法線方向的靜磁場皆為零。若將(A)小題中位於 $h/2$ 的電荷 q 改成「磁荷」 q_m ，求鏡像「磁荷」的值及位置，使得兩者在超導體外的合成磁場，在超導體表面恰好滿足前述的物理條件。
- (E). 如圖六所示，若空間中在 $h/2$ 處，有沿 x 軸正向、電流為 I 的無限長載流導線，求鏡像載流導線的電流值及位置，使得兩者合成的磁場，在超導體表面恰好滿足前述的物理條件。

四、雷射腔內的駐波

在雷射腔體的兩端面處各置有一個鏡面，用於反射雷射光。鏡面的反射率 $R = r^2$ ， R 定義為反射光和入射光的光強比值； r 稱為反射係數，定義為反射光和入射光的電場振幅的比值。高反射率的鏡面 (R 值約為 0.99) 能使腔體內的雷射光，在兩鏡面之間經歷連續多次的來回反射 (參看圖七)，而光強不至於大幅減弱，因此能在腔體內形成駐波。設兩鏡面之間的距離為 L ，雷射腔體內的光速為 c ，雷射光的頻率為 f ，考慮雷射光在腔體內形成的縱向模 (longitudinal mode) 駐波，回答下列問題：



左圖為不按比例且誇大的示意圖，用於顯示雷射光在腔體內兩鏡面之間的來回反射情形。圖中的 θ 角極小，幾近於零。

圖七

- (A) 雷射光在兩鏡面之間來回反射一次，所經歷的相角變化為何？以 L 、 c 、和 f 表示之。
- (B) 在腔體內能維持縱向模駐波的頻率為何？又這種縱向模駐波頻率的最小間隔為何？兩者皆以 L 和 c 表示之。
- (C) 導出從腔體一端透射出的雷射光強的表示式，以 L 、 f 、和 R 表示之。
- (D) 若雷射光的頻率偏離駐波頻率的許可值，則透射出的雷射光強會隨之減弱。利用前述三小題的結果，計算當透出的雷射光強減至其最大值的一半時，上述雷射光頻率的偏差量為何？

五、量子點中的庫侖障礙

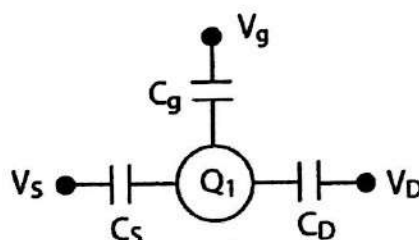
「量子點」(quantum dot) 是指材料體積束縛於奈米級尺寸的結構。量子點中電子的運動因受到空間束縛而產生顯著之量子侷限效應 (quantum confinement effect), 即量子點中電子處於量子化的離散能階狀態。這個性質類似於原子中之電子, 所以量子點又被稱為「人造原子」(artificial atom)。量子點具有奇特的光學與電學性質; 舉例來說, 量子點外的電子因受到來自點內部電子的庫侖排斥力影響, 所以無法進(加)入量子點中, 此現象稱為「庫侖障礙」(Coulomb blockade)。庫侖障礙可用外加電場方式來移除, 用此方法能使單一電子穿隧進入量子點中, 故電子學上量子點元件又被稱為「單電子電晶體」。本題目試用一簡單物理模型以了解量子點系統中電子傳輸行為。

考慮一量子點元件由量子點與三個電極: 源極 (Source), 汲極 (Drain), 與閘極 (Gate) 所構成, 如圖八所示。源極與汲極可提供穿隧電子。此處主要假設為: 量子點中電子與電極上電子的庫侖作用力可以電容 C_S 與 C_D 來描述。源極與汲極電壓分別為 V_S 與 V_D 。閘極與量子點中間為一絕緣層, 其間電容為 C_g , 閘極用以施加外部電場, 其上電壓為 V_g 。當所有外部電壓為零時, 量子點內攜帶有 N_0 個電子, 以保持系統電中性, 總靜電能為零。而有外部電壓時, 量子點有 N 個電子, 對應電荷 $Q_1 = -(N - N_0)e$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。

回答以下問題:

(A) 求出耦合到量子點總電容值 C_t 與此系統之總靜電能 U 。

(B) 考慮 $V_S \sim V_D \sim 0$, 計算 $\Delta U(N) = U(N) - U(N-1)$ 及 $\Delta U(N)=0$ 時 U 值。



圖八

註: $\Delta U(N)$ 為此系統之化學能, 即增加一個電子所需的能量。 $\Delta U(N)=0$ 時, 增加一個電子不需額外的能量, 此時庫侖障礙移除, 電子可穿隧進入量子點。

(C) 考慮 $\Delta E = \Delta U(N) - \Delta U(N-1)$ 此為量子點系統之充電能量(charging energy), 充電時間可由 $\Delta t = RC_t$ 估算, R 為由源極到汲極的電阻。估算要能觀察到庫侖障礙之電阻及溫度條件。