

2017年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(二)試題

2017年4月5日 08:10-12:10

- 一、 本試題共五大題，每一題 20 分，總分 100 分。
- 二、 考試時間四小時。
- 三、 在指定的答案紙上作答。
- 四、 限以黑色或藍色原子筆作答。
- 五、 可使用無程式掌上型計算機。

2017 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(二)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、質點彈簧耦合系統

沿 x 方向以間隔距離 a 排列的質點彈簧耦合系統，質點(以實心圓點表示)的質量皆為 m ，質點的平衡位置分別為 $(x, y) = (na, 0)$ 與 $(x, y) = (na, d)$ ， n 為整數 $(0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty)$ ，如圖一所示。彈簧以實線與虛線表示，彈性常數為 κ (實線)與 κ' (虛線)，當質點都在其平衡位置時彈簧皆在其原長的狀態。兩隣近彈簧(彈性常數為 κ 者)並未互相接觸，各自的運動也沒有互相影響。

設質點只能沿 y 方向運動，所有摩擦力皆不計，質點偏離平衡位置 $(na, 0)$ 的距離為 y_{A_n} ，偏離平衡位置 (na, d) 的距離為 y_{B_n} 。

定義 $\omega_1 = \sqrt{\kappa'/m}$ ， $\omega_2 = \sqrt{\kappa/m}$ ， $\alpha = (\omega_2 d / \omega_1 l)^2$ ， $l = \sqrt{a^2 + d^2}$ 。

(A) 試推導 y_{A_n} 及 y_{B_n} 的運動方程式，用以上定義的物理量表示之。

(B) 設 $y_{A_n} = y_{A0} e^{ikna - i\omega t}$ 與 $y_{B_n} = y_{B0} e^{ikna - i\omega t}$ ，試求耦合彈簧系統的振動頻率 $\Omega = \omega / \omega_1$ ，

以 k 及系統的物理量表示之，並證明有兩個振動頻率 $\Omega_{\pm}(k)$ ，其中

$$\Omega_+(k=0) > \Omega_-(k=0)。$$

(C) 試分別求 $\Omega_+(k)$ 與 $\Omega_-(k)$ 的振動方式(即 y_{A0} 與 y_{B0} 的關係)。

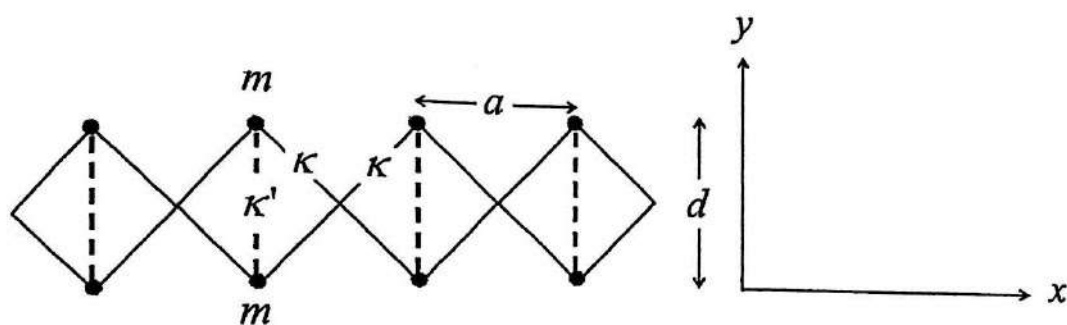
(D) 以下考慮 $2\alpha \geq 1$ 的情形；並考慮 $-\pi \leq ka \leq \pi$ ：

試證明 $\Omega_+(k)$ 與 $\Omega_-(k)$ 必相交於 $k = \pm k_0$ ，求 k_0 與 $\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}(k_0)$ 。

求 k_0 的可能範圍。

(E) 以下考慮 $\alpha = 1$ ，試描出在 $-\pi \leq ka \leq \pi$ 範圍內 $\Omega_{\pm}(k)$ 的圖形。

試求 k_0 與 Ω_0 。



圖一

二、粒子探測器

在高能實驗中，矽晶塊可用於偵測反質子(帶一個電子負電)。反質子進入矽晶塊後，會和矽原子碰撞而減速。在有些情況下，矽原子的所有電子會被迅速游離，形成由一個反質子環繞矽原子核的奇特原子。

(A) 利用波耳模型 導出該奇特原子的能階公式，並計算當反質子從 $n=2$ 躍遷至 $n=1$ 的能階時，所放射出的光子能量為何？

【註】：求解本題時，你也許需用到下列的數據：

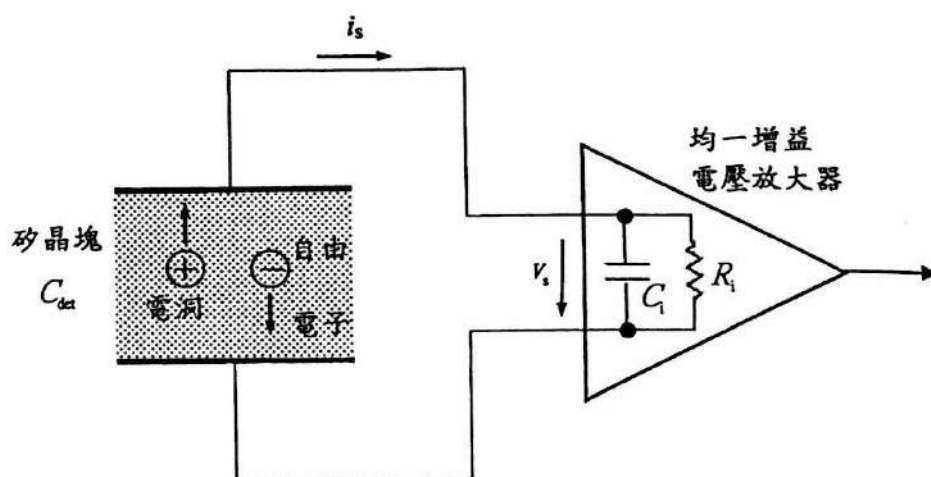
$$\text{反質子的質量 } m_p = 938 \text{ MeV}/c^2 ; \text{精細結構常數 } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} ;$$

矽原子的原子序 $Z=14$ ；矽原子的質量數 $A=28$ 。

(B) 將矽晶塊的兩相對表面跨接適當的電壓，可作為粒子偵測器之用。這是由於前述的奇特原子在能階躍遷時所放射的光子，會打斷晶塊內矽原子的共價鍵，而產生一對自由電子和電洞。這些電子-電洞對可以被引出晶塊，輸入均一增益電壓放大器(Unity-Gain Amplifier，電壓增益為 1，作為阻抗匹配之用)，而獲得電壓訊號的輸出(參看圖二所示的電路)。已知在矽晶體內產生一對自由電子和電洞所需的光子最小能量為 3.6 eV ，假定電路中的矽晶塊的電容 C_{det} 和電壓放大器的輸入電容 C_i 的並聯等效電容值為 4.0 pF ，試計算：

(i) 前述的一個奇特原子在放射出光子後，所可能產生的電子-電洞對的最大數目為何？

(ii) 電壓放大器輸出端所能產生的最大脈衝電壓為何？



圖二

(C) 在使用時，通常將矽晶塊偵測器冷卻至相當低的溫度，試問這有什麼好處？

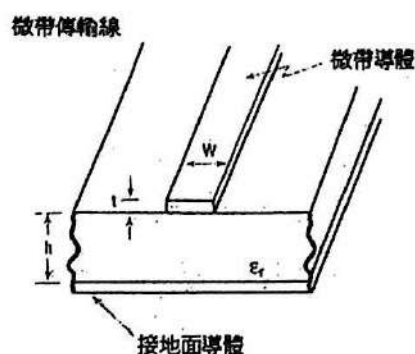
(D) 假設反質子進入矽晶塊時，具有動能 5.0 MeV。該反質子在穿行過程中，因和矽原子之間的交互作用而損失能量，將逐漸減速，直至其速度幾乎為零時，才能被矽原子捕捉。已知反質子在穿行過程中，每單位長度所損失的能量為 $dE/dx = -K\rho\beta^{-2}$ MeV/m，式中 K 為常數，矽晶塊的密度 $\rho = 2.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ， $\beta = v/c$ ， v 為反質子的速率， c 為真空中的光速。根據貝特-布洛赫公式 (Bethe-Bloch Formula)， $K = 0.12 (\text{MeV} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1})$ ，估計將該反質子減速至零，所需矽晶塊的最小厚度為何？

三、兩種離散式傳輸線

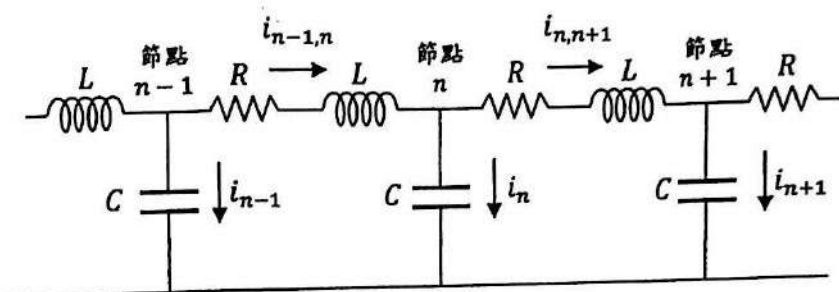
微帶傳輸線 (microstrip transmission line) (如圖三所示) 是一種常見的訊號傳輸線，其接地金屬面的電阻，可以忽略不計，而上導線的每單位長度之電感、電阻及電容 (對接地面而言) 分別設為 L 、 R 、及 C 。為了簡單起見，我們可將微帶傳輸線區分成許多等長的小段，小段長度為 ℓ ，並用如圖四所示的離散式模型來近似，並瞭解其傳輸特性。

在此圖中 $L = L\ell$ ， $R = R\ell$ ， $C = C\ell$ 。接著考慮另一種離散式傳輸線 (如圖五)，將圖

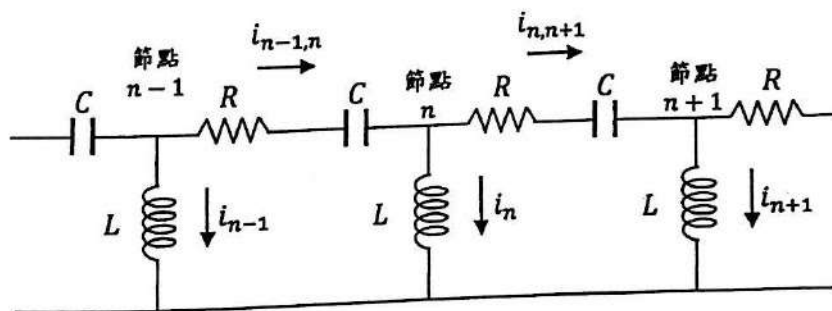
四的 L 和 C 互換，導出其傳輸特性，並討論兩者的異同及所代表的物理意義。(註： L 、 R 、 C 的單位分別為 H/m 、 Ω/m 、 F/m)



圖三



圖四



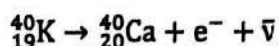
圖五

- (A) 利用圖四之模型，考慮一正弦波 $v_n(t) = \text{Re}\{v_0 e^{j(k(n\ell) - \omega t)}\}$ ，由左向右傳遞。此處 $j \equiv \sqrt{-1}$ ， $\text{Re}\{\}$ 代表取大括號內之實數部分。試求 k 與 ω 的關係式。
- (B) 承(A)，取 $k\ell \rightarrow 0$ 之極限，且 $R \ll \omega L$ ，求此離散式微帶傳輸線之波速、群速、及訊號衰減長度(訊號強度衰減為 $1/e$ 之長度)。
- (C) 利用圖五之模型，考慮一正弦波 $v_n(t) = \text{Re}\{v_0 e^{j(k(n\ell) - \omega t)}\}$ ，由左向右傳遞。試求 k 與 ω 的關係式。

- (D)承(3)，取 $k\ell \rightarrow 0$ 之極限，且 $RC \ll 1/\omega$ 。求此離散式微帶傳輸線之波速、群速、及訊號衰減長度。
- (E)討論這兩種離散式微帶傳輸線的異同及所代表的物理意義。

四、 β -衰變

β -衰變實驗中，電子動能(K)連續分佈的數據是顯示微中子(ν)存在的重要實驗。例如：鉀的同位素 $^{40}_{19}\text{K}$ (其中數字40為原子量，即原子核內中子與質子的總數，19為原子序，即為質子個數)會經由 β -衰變，衰變到鈣 $^{40}_{20}\text{Ca}$ ，並且放出一個電子和一個微中子。



其中 $\bar{\nu}$ 為反微中子。考慮靜止的 $^{40}_{19}\text{K}$ 進行 β -衰變。

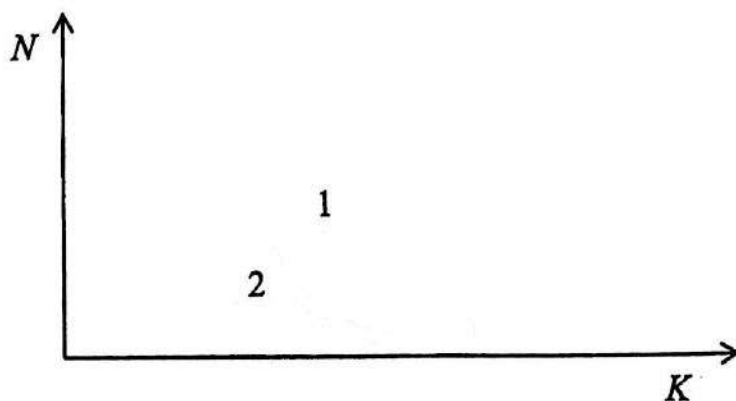
- (A)在標準模型中，微中子、反微中子質量為零。在此一過程中， $^{40}_{20}\text{Ca}$ 動能可忽略，則電子的最大動能為？

(B)估算一下 $^{40}_{20}\text{Ca}$ 的動能，說明此一動能確實可以忽略。

- (C)我們目前知道 β -衰變是弱作用的過程，但早期並不知道此電子是如何產生的，如果此電子是一開始就存在於原子核內，已知原子核大小約為1費米(1費米為 10^{-15}m)，請由海森堡不確定原理估算電子在原子核內的動能大小。(經由與實驗數據比較，我們可由此推測此電子是額外產生的。)

- (D)電子在最大動能附近的分佈情形可以用來判斷微中子是否有質量。已知在此過程中，若微中子質量為零時，電子具有動量大小 p 的數目可表示為 $N(p) = Ap^2q^2$ ， A 為常數， q 為反微中子此時的動量大小。則請說明，電子動能(K)分佈情形為下列圖六中的何者(1或2)？

註： $^{40}_{19}\text{K}$ 原子質量為 39.963999 u ， $^{40}_{20}\text{Ca}$ 原子質量為 39.962591 u ， $1\text{ u} = 931.5\text{ MeV}/c^2$ ， c 為光速，電子質量為 $0.511\text{ MeV}/c^2$ ， $\hbar = 0.6528 \times 10^{-15}\text{ eV} \cdot \text{sec}$ 。



圖六

五、熵的問題

(A) 單原子理想氣體的熵 S 可用 Sackur-Tetrod 方程式來計算：

$$S = Nk \left\{ \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m U}{3N h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{5}{2} \right\} \quad (1)$$

，式中 N, V, m, U 分別為該理想氣體的粒子數目，體積，粒子質量及系統總能量； h 為普朗克常數。我們可以用(1)式估計太陽的 S 。請分別計算 Nk 與

$\left\{ \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m U}{3N h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{5}{2} \right\}$ 的大小。太陽質量 $M = 2.0 \times 10^{30} \text{ Kg}$ ，半徑 $R = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$ 。

(B) 一個黑洞的重力大到連光子都無法逃脫黑洞表面。請由此論點推出一個質量 M 黑洞的半徑 R 。

(C) 任何東西被黑洞吸入即無法再逃脫。此事件可視為一個不可逆過程，所以黑洞的 S 應該很大。我們可考慮困在黑洞中的粒子已全成為光子，且波長 $\lambda \leq R$ ，試估計質量為太陽大小的黑洞的 S 。請將此值與銀河系的所有星球 S 的總和做比較；一個銀河系可能有 1×10^{11} 到 4×10^{11} 個星體，且黑洞質量很可能遠大於太陽質量。

(D) 試推論黑洞的 S 與其表面積的關係。