

2017 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營理論模擬試題

本試題共三大題，每大題 50 分，總分 150 分。

一、一維晶格的振動與雷射光的繞射

沿 x 方向以間隔 $L = a + b$ 排列的晶格系統，質點的平衡位置為 $x_{A,n} = nL$ (空心圓) 與 $x_{B,n} = nL + a$ (實心圓點)， n 為整數：在入射雷射光範圍內的 $n = 0, 1, \dots, N-1$ ，入射雷射光的頻率為 ω ，行進方向為 $+\hat{z}$ ，波函數為 $\psi_{in} = e^{ik_0 \cdot \vec{r}}$ 如圖一所示。

(a) 若質點皆靜止在平衡位置上，並已知自 x_n ($x: x_{A,n}$ 或 $x_{B,n}$) 點發出雷射光的繞射波為

$$f \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_n|}}{|\vec{r}-\vec{r}_n|} \approx f \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_n|}}{r} \quad (f: f_A \text{ 或 } f_B), \quad \vec{r}_n = (x_n, 0, 0),$$

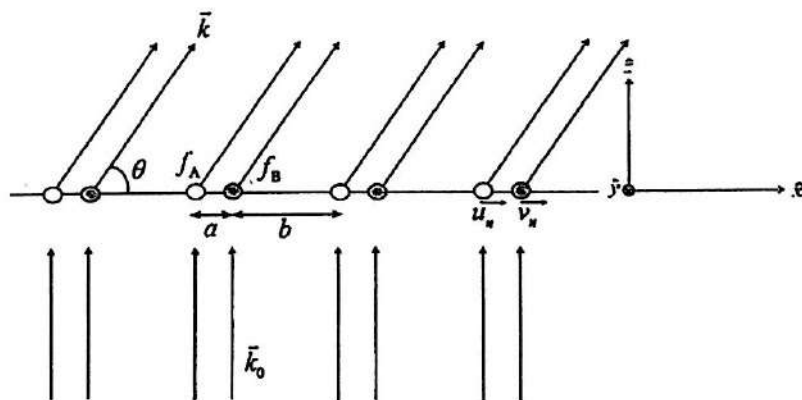
試寫出總繞射波 $\psi_D = e^{ikr} F/r$ ，以 k_x, L, a, b, f_A, f_B 表示 F 。

試寫出繞射波建設性干涉時 k_x 的值 $k_{x,m}$ ($k_{x,1} < k_{x,2} < \dots < k_{x,max}$)。

試求出繞射波建設性干涉為 $k_{x,m}$ 時，繞射角 θ_m 的線寬，即 $F(\theta = \theta_m + \theta') = 0$ 時 θ' 的表達式。

(b) 以下(包括(c)部分)考慮 $f_A = f_B$ ， $a/L = 1/4$ ：

試求上題的繞射波建設性干涉消失的 m 值。



圖一

(c) 若質點沿 x 來回運動，則 $x_{A,n} = nL + u_n$ ， $x_{B,n} = nL + a + v_n$

($\{u_n, v_n\} \ll \{a, b\}$)，如圖一所示。考慮晶格以頻率 Ω 、波向量 q 的方式做整體的振動，使 $u_n(t) = u_0 \cos(\Omega t - qnL)$ ， $v_n(t) = -u_0 \cos(\Omega t - qnL)$ 。由於雷射光的頻率 $\omega \gg \Omega$ ，我們可以將 $x_{A,n}(t)$ 與 $x_{B,n}(t)$ 用於(a)題的結果，從而得到雷射光建設性干涉的時變現象。以下我們考慮比較簡單的情形： $q \rightarrow 0$ 及 $k_x u_0 \ll 1$ 的情形，並固定在 $\theta = \theta_m$ 的方向上。

試求 F ，並保留到 $(k_x u_n)^2$ 的貢獻。

試求 $m=1$ 的 $|F|^2$ 。

試求 $m=2$ 的 $|F|^2$ 。

試討論你會使用以上那一個 m 來偵測晶格的振動？

數學公式附錄：

答題時如有需要，可利用以下關係式：

$$(i) \quad \frac{de^{kt}}{dt} = ke^{kt}$$

$$(ii) \quad e^{kt} \left(\frac{ds_n}{dt} + ks_n \right) = \frac{d}{dt} (e^{kt} s_n)$$

$$(iii) \quad \int e^{kt} dt = \frac{e^{kt}}{k} + \text{未定常數}$$

$$(iv) \quad \int te^{kt} dt = \frac{e^{kt}}{k^2} (kt - 1) + \text{未定常數}$$

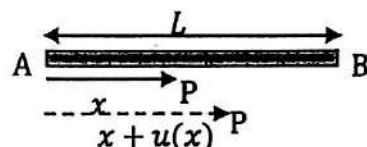
二、突然墜落之細桿中的彈性波

如圖二所示，一長為 L 之均勻細桿，設其每單位長度之質量密度為 ρ ，在應力作用下，細桿的形變可以虎克定律描述，即若原先在 x 位置的截面 P 移到 $x + u(x)$ 時，假設 $u(x)/L \ll 1$ ，此截面所受的應力 $\tau(x)$ (單位截面積上垂直截面之受力) 可以用楊氏模量 E 描述，即

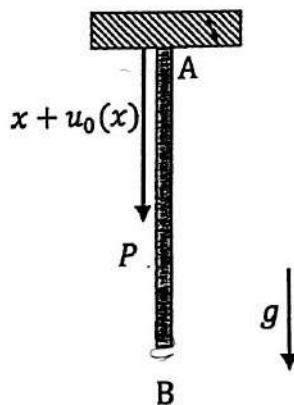
$$\tau(x) = E \frac{du(x)}{dx}。$$

今將此細桿鉛直懸掛，如圖三所示，試回答以下問題：

- (a) 試求靜力平衡時，在 x 位置的截面 P 上的應力 $\tau_0(x)$ ，並由此求出此截面的形變位移 $u_0(x)$ (位移以向下方向為正)。



圖二



圖三

- (b) 在時間 $t = 0$ 時，將細桿自 A 點截面處分離釋放，使其自由落下，如圖四所示，則在 A 點的張力瞬間由 $\tau_0(0) \neq 0$ 降為 0，此不連續的應力改變會由 $x = 0$ 處以細桿中彈性波之波速 $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 向下傳播，使得形變位移 $u(x, t)$ 亦與時間有關。

已知不連續的應力並不造成形變位移的不連續，重力加速度為 g ，且下落過程裡在細桿的質心座標中，細桿中的彈性波可以波速 c 描述，即當 $x < ct$ ，質心座標中的形變位移 $\eta(x, t)$ 為向下與向上傳播的波的組合

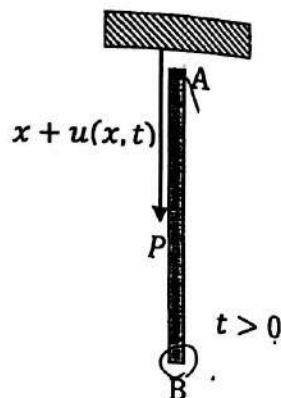
$$\eta(x, t) = f(x - ct) + h(x + ct),$$

其中 $f(x)$ 與 $h(x)$ 為描述波形的函數， $\eta(x, t) = u(x, t) - gt^2/2$ 。假設細桿離地面夠遠，細桿落地所需的時間甚大於不連續的應力由 A 點傳到 B 點的時間 T ，試利用形變位移連續的特性與質心坐標中動量分佈之特性，回答以下問題：

- 已知向下傳播的彈性波可設為 $f(0) = 0$ ，試求出 $f(x)$ 與 $h(x)$ (以 g, c, L, x 表示)。
- 求出在 t 時刻，固定座標系中之形變位移 $u(x, t)$ 分佈 (以 g, c, L, x, t 表示) 以及速度分佈 $v(x, t)$ (以 g, T, t, x 表示)。

$$\text{註：} \frac{df(x-ct)}{dt} = -cf'(x-ct), \quad \frac{dh(x+ct)}{dt} = ch'(x+ct)$$

- 試求不連續的應力抵達 B 點前 (即 $0 < t < T$) 之應力分佈 $\tau(x, t)$ (以 g, ρ, L, x 表示)，利用反射波經自由端反射的特性，試求時間在 $T < t < 2T$ ，形變位移 $u(x, t)$ 分佈 (以 g, c, L, x, t 表示) 以及速度分佈 $v(x, t)$ (以 g, T, t, x 表示)。由此推廣導出 B 點速度隨時間的變化，並作圖。

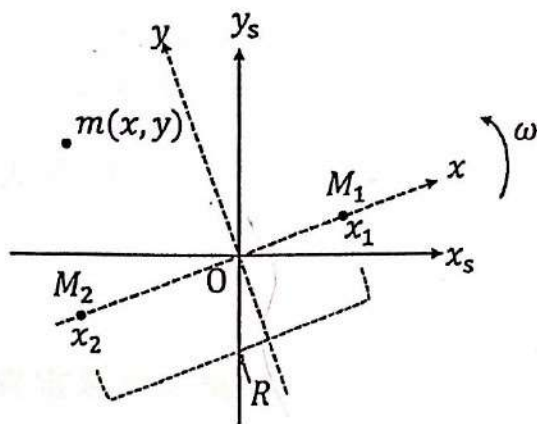


圖四

三、狹義的三體問題

假設有質量為 M_1 和 M_2 的兩個質點 (簡稱為 M_1 和 M_2)，相距為 R ，在彼此的重力交互作用下，繞著它們兩個的質心 O 做圓周運動，而第三個質點 (稱為 m) 的質量為 m ，在 M_1 和 M_2 的重力作用下運動。我們假設質量 m 很小，不致對 M_1 和 M_2 的圓周運動造成影響，且三個質點的運動都在同一平面，並以 G 代表重力常數。

- 求出 M_1 和 M_2 所做圓周運動的角速率 ω 。
- 如圖五所示，引進一個轉動的直角座標系，其原點位於 O ，且以角速率 ω 繞通過 O 的轉軸 (即 z 軸) 旋轉， M_1 和 M_2 固定位於其 x 軸上，座標分別為 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ ，而 m 的座標為 (x, y) 。若 m 在固定不動之空間座標系 (原點亦為 O) 的座標為 (x_s, y_s) ，且在 $t = 0$ 時，兩座標系重合，試求在時刻 t 時 (x, y) 和 (x_s, y_s) 之間的轉換公式。



圖五

(c)求質點 m 在轉動座標系的運動方程式(以分量式表示)。

(d)由前小題(c)的運動方程式，可導出一個守恆量如下：

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x, y)$$

試求出函數 $V(x, y)$ 。

(e)試將前小題(d)的函數 V 改用下列無因次的座標表達：

$$\xi_1 = \frac{x_1}{R} = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{R} = \frac{-M_1}{M_1 + M_2} = \xi_1 - 1, \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad \eta = \frac{y}{R}$$

以下改用無因次的座標，回答各問題。

(f)求質點 m 在轉動座標系中的平衡位置(即可保持靜止的位置)。答案只需給出與 M_1 和 M_2 的相對距離；若無法以距離表示，可用不等式表示其位置範圍。

(g)承上一小題(f)，有兩個平衡位置(稱為D與E點)，它們的座標 (ξ, η) 滿足以下的聯立方程式，

$$\begin{aligned} (\xi - \xi_2)^2 + \eta^2 &= 1 \\ (\xi - \xi_1)^2 + \eta^2 &= 1 \end{aligned} \quad (G1)$$

試求D與E點的座標。

已知 V 在平衡位置D與E點附近的等位線可近似為橢圓。試問 V 在D與E處是極大值或極小值？