

2018年國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊決選研習營

筆試(一)試題

2018年4月7日 08:10-12:10

- 1、本試題共五大題，每一題20分，合計100分。
- 2、考試時間四小時。
- 3、在指定的答案紙上作答。
- 4、可使用無程式掌上型計算機。

2018年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(一)試題

本試題共有五大題，每一題20分，合計100分。

1、中子星

中子星是恆星演化後期的產物之一，一個典型的中子星的質量約1~3個太陽質量，半徑約為5~20公里，是一個質量密度極大的星體。今年八月位於美國的LIGO以及意大利的Virgo觀測到重力波訊號(GW170817)，就是來自離我們約13億光年外，兩個中子星合併時所產生的。中子星形成初期，溫度極高，可達 $10^{10} K$ 。冷卻的過程中，微中子與光子輻射扮演極為重要的角色。

(A). 觀測到一中子星的電磁波光譜分佈在波長為3 nm的地方有極大值，由此估算其表面溫度為何？(已知太陽表面溫度約為6000 K，光譜極大值在波長為0.5 μm)

(B). 已知此中子星質量為太陽的1.4倍，半徑為10公里。現在以一個極為簡單的球模型來模擬中子星的構造，球的表面下有一層極薄的熱傳導層，如下圖所示。微中子來自中子星內部的核反應，假設每秒鐘約有 $10^{50} \left(\frac{T}{10^9} \right)^8$ 個微中子產生，其中T是中子星核內的溫度(假設為均勻)。內部的溫度T與表面的溫度 T_s 的關係為

$T_s = 10^6 \left(\frac{T}{10^8 K} \right)^{\frac{1}{2}} K$ 。估算電磁波輻射所造成溫度的時變率與微中子輻射所造成的溫度時變率的比。(已知：中子星的定容比熱為 $10^{37} \frac{eV}{(m^3 \cdot K)}$)



(C). 中子星合併時，不僅會產生重力波，在合併的過程中，也會產生其他可觀測的粒子，如這次GW170817中，LIGO與Virgo也觀測到高能的光子(gamma-ray burst)。除了光子外，高能量的微中子也可能是產物之一(目前並沒有觀測到)。假設，我們也在GW170817中，在觀測到光子2秒後觀測到具有能量為10 MeV的微中子，請由此估算微中子的質量。

2、史特靈引擎

史特靈引擎(Stirling Engine)於一八一六年由英國物理學家史特靈所發明，為一種閉循環外燃引擎。自從內燃式引擎(如奧圖Otto或柴油Diesel引擎)問市後，此設計就漸被少用。但因史特靈引擎可用多種外部熱源，可用再生能源，燃燒較為完全，排氣

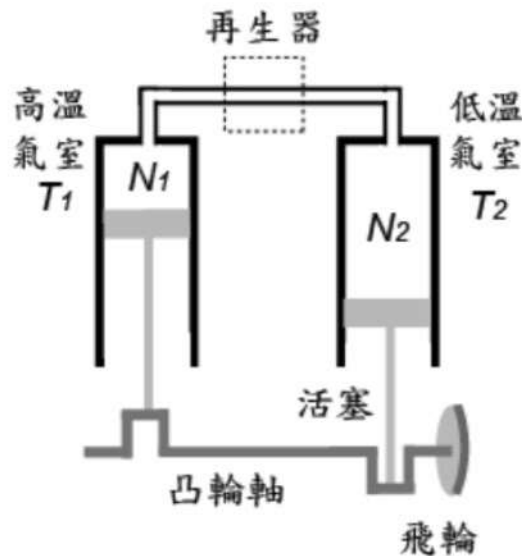
潔淨，低排放及較環保等優點，近年來在能源工程相關技術上，對史特靈引擎的研究又再受重視，本題將討論史特靈引擎相關之熱物理機制。

史特靈引擎在實際應用中的工作架構可由如下簡圖所模擬，引擎部分包含兩活塞，兩活塞分別位於高溫氣室(溫度 T_1 ，體積為 V_1)與低溫氣室(溫度為 T_2 ，體積為 V_2)中，工作氣體於兩氣室中流動，假設高溫氣室內氣體莫耳數為 N_1 ，低溫氣室內氣體莫耳數為 N_2 。兩氣室由再生器(Regenerator)連接，如圖中之虛框所示，再生器將循環過程中排出的熱量用來提供吸熱過程中所需的熱量，以提升熱效率，可使得 T_2/T_1 維持一定，並使兩氣室中氣體壓力 P 相同。此處假設摩擦力、氣體與氣室和活塞之間的熱交換都可忽略不計，連接管及再生器體積、質量與其內氣體質量亦可忽略。此處考慮氣室內為單原子理想氣體，氣體熱力循環由一多變過程(polytropic process)所描述，即 $PV^\beta = \text{常數}$ ，其中 $V(=V_1+V_2)$ 為兩氣室之總體積， β 為一參數，可由實驗決定。此過程中各氣室中氣體吸收(放出)熱量 dQ 的變化與其溫度對應變化 dT 可表示為

$$dQ = cNdT \quad (1)$$

此處 c 為莫耳比熱， N 為氣體莫耳數。註：若多變過程為絕熱過程 $c = 0$ ，若為定壓過程 $c = c_p$ (莫耳定壓比熱)，若為定容過程 $c = c_v$ (莫耳定容比熱)。熱力參數間有以下關係：

$$c = c_v \frac{\gamma - \beta}{1 - \beta}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2)$$



回答以下

問題：

- 現在因工作氣體流動，造成高溫氣室有 dN_1 氣體與低溫氣室 dN_2 氣體數改變，兩氣室內分別對應有 dT_1 與 dT_2 的溫度微小變化，則系統總內能變化為 dU 為何？
- 在(A)情況下系統總熱量 dQ 的變化為何？
- 由(A)與(B)之結果，在已知 dU 與 dQ 變化情況下，求系統做功 $dW(=PdV)$ 為何？
- 找出各氣室中氣體數與體積與壓力的關係。即求 N_1/N 和 N_2/N ($N = N_1 + N_2$)，以 V_1 、 V_2 、 T_1 與 T_2 表示。
- 引擎各氣室起始時壓力為 P_0 ，起始溫度與體積分別 $\{T_{10}, V_{10}\}$ ， $\{T_{20}, V_{20}\}$ ，運作後壓力為 P ，各氣室 $\{T_1, V_1\}$ ， $\{T_2, V_2\}$ 。求 P/P_0 之關係。
- 試證明

$$T_1 = T_{10} \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\beta-1}$$

$$T_2 = T_{20} \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\beta-1} \quad (3)$$

註:再生器功能可使得 $T_2/T_1 = T_{20}/T_{10} (= \alpha)$

(G)利用(d), (e)與(f)之結果, 起始條件為已知參數, 求 P/P_0 與 V_1, V_2 間的關係。即求

$$P/P_0 = P/P_0(V_1, V_2)$$

(H)求出系統總熱量 dQ 與 P, V_1, V_2 間的關係。即求 $dQ = dQ(P, V_1, V_2)$

三、均勻磁場中的量子系統

考慮一個質量為 m 、帶負電荷 $-e$ 的粒子在均勻磁場 $B = B\hat{z}$ 中的運動。

(A). 假設粒子被限制在 $x - y$ 平面上運動, 寫下此粒子所滿足的牛頓運動方程式。
由牛頓運動方程式證明該粒子的運動為等速圓周運動, 並求其對應的角速度 ω_c 。

(B). 假設已知上述系統的量子能譜為 $E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$, 其中 $n \geq 0$, 且為整數。證明
粒子對應的角動量 $J_n = (2n + 1)\hbar$ 。

(C). 承(A)小題, 考慮相對論效應, 寫下在這個情況下此粒子所滿足的運動方程式。
若粒子的運動速率為 v , 求該粒子的圓周運動角速度 $\tilde{\omega}_c$ 。

(D). 承(C)小題, 利用角動量量子化條件 $J_n = (2n + 1)\hbar$, 求這個情況下該系統的量子能譜 $\tilde{E}_n$ 。

(E). 已知靜止質量為零的粒子滿足下列能量動量關係 $E = cp$, 寫下此粒子所滿足的運動方程式。若粒子的能量為 E , 求該粒子的圓周運動角速度 $\tilde{\Omega}_c$ 。

(F). 承(E)小題, 利用角動量量子化條件 $J_n = (2n + 1)\hbar$, 求這個情況下該系統的量子能譜, 並證明此結果與(D)小題的零質量極限一致。

四、非均勻折射率介質中的光線路徑

如附圖所示, 在 $x = 0$ 到 $x = d$ 之間的區域, 充滿著折射率 $n(z)$ 隨高度 z 而變的介質:

$$n(z) = n_0 \sqrt{1 - k(z - H)} \quad (z - H < 1/k, \quad 0 \leq x \leq d)$$

上式中的 n_0, k, H 為正值常數。空間中其他區域的折射率均為 n_0 , 而在 $x = d + L$ 處有一個 yz 平面的屏幕。

一條在 xz 平面($y = 0$)的光線, 在 $x = 0, z = H$ 處以入射角 φ_0 射入介質。已知 $\sin \sin 2\varphi_0 \leq kd \leq 2$ 。

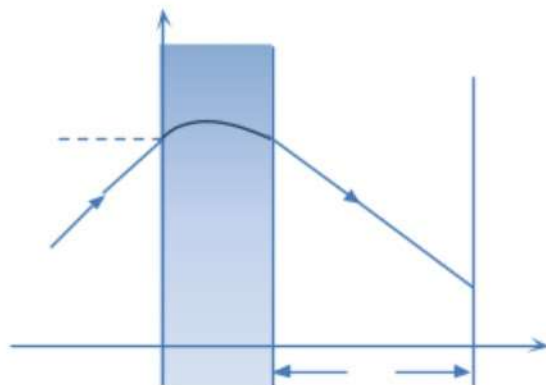
(A)光線在介質中的軌跡 $z(x)$ 為何?

(B)在 $x = d$ 處, dz/dx 為何?

(C)若 $\varphi_0 = 0$, 且光線進入 $x = d$ 平面的入射角為 α , 則 $\sin \alpha$ 為何?

(D)若 $\varphi_0 = 0$, 且光線穿出 $x = d$ 平面的折射角為 ψ , 則 $\sin \psi$ 為何?

(E)若 $\varphi_0 = 0$, 則光線到達 $x = d + L$ 處屏幕時的高度 h 為何?



$$\begin{aligned} L \\ x = d \\ 0 \\ x \\ z \\ h \\ z = H \\ \varphi_0 \end{aligned}$$

五、梅斯堡效應(Mössbauer effect)

梅斯堡效應, 即原子核輻射的無反彈共振吸收。此效應首先是由德國物理學家梅斯堡於1958年首次在實驗中實現, 應用此效應可以精確測量原子核與周圍環境的超精細交互作用, 其能量解析度可高達 10^{-13} , 梅斯堡因此貢獻獲得1961年的諾貝爾物理學獎。理論上, 當一個原子核由激發態躍遷到基態, 會放出一個 γ 射線光子, 當此光子遇到另一個相同原子核時, 就能夠被共振吸收。但實際情況中, 處於自由狀態的原子核很難實現此過程, 因為原子核在放出光子時, 自身也會反彈, 這個反彈動作會使光子的能量減少。同理, 吸收光子的原子核, 吸收的光子由於反彈效應, 能量會有所增大。如此造成相同原子核的發射譜和吸收譜有所差異, 所以自由的原子核很難共振吸收。梅斯堡提出實現 γ 射線共振吸收的關鍵在於消除反彈效應。如果在實驗中把發射和吸收光子的原子核置於固體晶格中, 那麼出現反彈效應的就不再是單一的原子核, 而是整個晶體。由於晶體的質量遠遠大於單一的原子核, 反彈能量就能減少到可以忽略不計的程度。梅斯堡效應對環境的依賴性很高, 細微的環境條件差異都會產生顯著的影響。為減少環境的影響, 通常會利用都卜勒效應對 γ 射線光子的能量進行細微的調整。具體做法是令 γ 射線輻射源和吸收體之間具有一定的相對速度, 通過調整速度的大小來調整 γ 射線的能量, 使其達到共振吸收。目前, 在室溫下只有 ^{57}Fe 、 ^{119}Sn 、 ^{151}Eu 三種同位素能夠實現梅斯堡效應。其中, ^{57}Fe 的 14.4 keV 躍遷(用放射性 ^{57}Co 衰變發射出能量14.4 keV的 γ 射線將 ^{57}Fe 原子核激發)是人們最常用, 也是研究最多的譜線。以下各題將帶領你做相關的估算。

(A)若鐵原子 ^{57}Fe 是完全自由的, 則因核反彈所引起的放射線偏移能量 ΔE 的能量分率

$$\frac{hf - \Delta E}{\Delta E}$$

為何? (假設原子核的質量為57個質子, 即 $57 \times 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$)

- (B) 若鐵為質量1克之固體，於無反彈過程中，發射光線之頻率偏移分率為何？
- (C) 若將 ^{57}Fe 原子核激發之 γ 射線，其自然頻寬 $\Delta f / f$ 為 3×10^{-16} ，求發射出 γ 射線的 Δf 值為何？(普朗克常數 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$)
- (D) 比較自由的鐵原子與固體中無反彈的鐵原子，在原子核輻射的過程中，其 Δf 有何差異？
- (E) 現在若放射源以 v 之速度向輻射吸收體運動移近，當吸收體之 γ 射線頻率以 10^{13} 分之3偏移時，速度 v 之值為何？(3/10相當於一共振譜線的頻寬)
- (F) 若無反彈的 ^{57}Fe 原子核所激發之 γ 射線，向上垂直運行22.5 m，求其發射出 γ 射線的能量減少分率為何？(重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$)
- (G) 在22.5 m高度處之 ^{57}Fe 原子核，須以何種速率及方向運動，才能使其經無反彈過程而吸收(F)小題所述之 γ 射線？